

Le système d'Euler bi-température non conservatif: propriétés entropiques et approximation numérique

Denise Aregba-Driollet

Bordeaux INP, IMB.

En collaboration avec J. Breil, S. Brull, B. Dubroca, E. Estibals.

Le modèle

Equations d'Euler pour un fluide dont l'ionisation $Z = \frac{n_e}{n_i}$ est supposée constante. Notations:

e : électrons, i : ions.

- ▶ c_e, c_i : fractions massiques.

$$\rho_e = \rho c_e = m_e n_e, \quad \rho_i = \rho c_i = m_i n_i, \quad c_e + c_i = 1.$$

Conséquence: c_e et c_i sont constantes.

- ▶ $u = u_e = u_i$
- ▶ On distingue les **énergies** ionique et électronique:

$$\mathcal{E}_\alpha = \rho_\alpha \varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} \rho_\alpha u^2, \quad \alpha = e, i.$$

Le modèle - suite

Deux lois de pressions et deux températures:

$$p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha \varepsilon_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha, \quad \alpha = e, i.$$

Les équations:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p_e + p_i) = 0, \\ \partial_t \mathcal{E}_e + \partial_x(u(\mathcal{E}_e + p_e)) - u(c_i \partial_x p_e - c_e \partial_x p_i) = \nu_{ei}(T_i - T_e), \\ \partial_t \mathcal{E}_i + \partial_x(u(\mathcal{E}_i + p_i)) + u(c_i \partial_x p_e - c_e \partial_x p_i) = -\nu_{ei}(T_i - T_e), \end{cases}$$

Systeme **non conservatif** avec sources.

Si $\gamma_e = \gamma_i$ alors $(\rho, \rho u, \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_i)$ est solution d'Euler classique.

- ▶ Définition des solutions faibles?
- ▶ Admissibilité des solutions faibles? Conditions d'entropie?
- ▶ Approximation numérique?

Références:

- ▶ Sur les solutions faibles: Dal Maso-Le Floch-Murat 1995, voir aussi Berthon-Coquel-Le Floch 2012.
- ▶ Numérique: Coquel-Marmignon 1998 pour un système similaire.

Nos résultats:

- ▶ Existence d'une entropie dissipative.
- ▶ Modèle cinétique sous-jacent compatible avec l'entropie.
- ▶ Schémas entropiques par relaxation et par méthode lagrangienne.

Entropie dissipative

Forme synthétique du système:

$$\partial_t \mathcal{U} + A(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{U} = G(\mathcal{U}).$$

On cherche $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe, et $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\forall \mathcal{U}, \quad \eta'(\mathcal{U}) A(\mathcal{U}) = Q'(\mathcal{U}), \quad \text{et} \quad \eta'(\mathcal{U}) G(\mathcal{U}) \leq 0$$

Si oui, toute solution **régulière** vérifie

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \partial_x Q(\mathcal{U}) \leq 0.$$

Changement de variable: $\mathcal{U} = \phi(\mathcal{V})$.

$$\tilde{\eta}(\mathcal{V}) = \eta(\phi(\mathcal{V})), \quad \tilde{Q}(\mathcal{V}) = Q(\phi(\mathcal{V})).$$

Existence de $(\eta, Q) \iff$ existence de $(\tilde{\eta}, \tilde{Q})$.

Ici $\mathcal{U} = (\rho, \rho u, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_i)$, $\mathcal{V} = (\rho, u, \varepsilon_e, \varepsilon_i)$.

Entropie d'Euler pour $\alpha = e, \alpha = i$:

$$\bar{\eta}_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha) = - \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha(\gamma_\alpha - 1)} \left[\ln \left(\frac{(\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha \varepsilon_\alpha}{\rho_\alpha^{\gamma_\alpha}} \right) + C \right], \quad Q_\alpha = u\eta_\alpha.$$

On pose

$$\tilde{\eta}(\rho, u, \varepsilon_e, \varepsilon_i) = \bar{\eta}_e(\rho c_e, \varepsilon_e) + \bar{\eta}_i(\rho c_i, \varepsilon_i), \quad \tilde{Q} = u\tilde{\eta}.$$

Membre de gauche OK car:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, & \times c_\alpha \quad \longrightarrow \text{comme Euler}(\alpha) \\ \partial_t u + u \partial_x u + \rho^{-1} \partial_x (p_e + p_i) = 0, & \longrightarrow \text{ne compte pas} \\ \partial_t \varepsilon_e + u \partial_x \varepsilon_e + \rho_e^{-1} p_e \partial_x u = \rho_e^{-1} \nu_{ei} (T_i - T_e), & \longrightarrow \text{comme Euler}(e) \\ \partial_t \varepsilon_i + u \partial_x \varepsilon_i + \rho_i^{-1} p_i \partial_x u = \rho_i^{-1} \nu_{ei} (T_e - T_i). & \longrightarrow \text{comme Euler}(i) \end{array} \right.$$

Dissipation par le terme source

En variable \mathcal{U} :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{E}_\alpha} = -\frac{1}{k_B T_\alpha}$$

d'où si \mathcal{U} est solution **régulière** du système:

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \partial_x Q(\mathcal{U}) = -\frac{\nu_{ei}}{k_B T_i T_e} (T_i - T_e)^2.$$

Inégalité d'entropie - Admissibilité des solutions

Il existe un modèle cinétique (BGK) sous-jacent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_e^\varepsilon + v_1 \partial_x f_e^\varepsilon + \frac{q_e}{m_e} E^\varepsilon \partial_{v_1} f_e^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{M}_e - f_e^\varepsilon) + \frac{1}{\tau_{ei}} (\overline{\mathcal{M}}_e - f_e^\varepsilon), \\ \partial_t f_i^\varepsilon + v_1 \partial_x f_i^\varepsilon + \frac{q_i}{m_i} E^\varepsilon \partial_{v_1} f_i^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{M}_i - f_i^\varepsilon) + \frac{1}{\tau_{ei}} (\overline{\mathcal{M}}_i - f_i^\varepsilon), \\ \partial_t E^\varepsilon = -\frac{j^\varepsilon}{\varepsilon^2}, \\ \partial_x E^\varepsilon = \frac{\overline{\rho}^\varepsilon}{\varepsilon^2}, \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha(f_\alpha), \quad \overline{\mathcal{M}}_\alpha = \overline{\mathcal{M}}_\alpha(f_e, f_i),$$

$$\overline{\rho}^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} (q_e f_e^\varepsilon + q_i f_i^\varepsilon) dv, \quad j^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} v (q_e f_e^\varepsilon + q_i f_i^\varepsilon) dv.$$

$$\mathcal{U}^\varepsilon = (\rho^\varepsilon, \rho^\varepsilon u^\varepsilon, \mathcal{E}_e^\varepsilon, \mathcal{E}_i^\varepsilon).$$

avec

$$\rho^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} m_e f_e^\varepsilon + m_i f_i^\varepsilon dv, \quad \rho^\varepsilon u^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} v_1 (m_e f_e^\varepsilon + m_i f_i^\varepsilon) dv$$

$$\mathcal{E}_\alpha^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v_1^2}{2} f_\alpha^\varepsilon dv, \quad \alpha = e, i.$$

Si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}$ alors \mathcal{U} est solution d'Euler bi-température et

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \partial_x Q(\mathcal{U}) \leq \frac{\nu_{ei}}{k_B T_i T_e} (T_i - T_e)^2.$$

Une solution sera dite **admissible** si elle vérifie cette inégalité.

Approximation numérique

- ▶ Le modèle BGK ci-dessus \rightarrow schéma cinétique
- ▶ Relaxation *a la Suliciu*
- ▶ Schéma lagrangien
- ▶ Schémas "BGK discrets" inspirés de l'approximation des lois de conservations, cf AREGBA-DRIOLLET ET NATALINI, SINUM 2000

Suite de cet exposé: **schémas "BGK discrets"**.

Modèles BGK discrets pour Euler conservatif classique (cf A.N. 2000)

Euler: système 3×3

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0.$$

Système "BGK discret": système $3L \times 3L$

$$\partial_t f^\varepsilon + \Lambda \partial_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (M(U^\varepsilon) - f^\varepsilon), \quad U^\varepsilon = P f^\varepsilon$$

avec

$$f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, \dots, f_L^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{3L}, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 I_3, \dots, \lambda_L I_3)$$

$P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3L}, \mathbb{R}^3)$: opérateur de moment.

Relations de **compatibilité**:

$$PM(U) = U, \quad P \wedge M(U) = F(U)$$

Stabilité: $\sigma(M'_i(U)) \subset [0, +\infty[$.

Exemple 2×2 :

$$Pf = f_1 + f_2, \quad M_1 = \frac{\lambda_2 U - F(U)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad M_2 = \frac{-\lambda_1 U + F(U)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Condition sous-caractéristique de Liu:

$$\sigma(M'_i(U)) \subset [0, +\infty[\iff \sigma(F'(U)) \subset [\lambda_1, \lambda_2].$$

Modèles BGK discrets pour Euler bi-temperature

- ▶ $Pf = \sum_l f_l$
- ▶ M_e, Λ_e pour Euler conservatif avec γ_e
- ▶ M_i, Λ_i pour Euler conservatif avec γ_i
- ▶ Pour le couplage avec E , $\alpha = e, i$:

$$N_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_\alpha = \text{diag}(N_\alpha, \dots, N_\alpha) \in \mathcal{M}_{3L}(\mathbb{R}).$$

D'où

$$P\mathcal{N}_\alpha = N_\alpha P.$$

Modèles BGK discrets pour Euler bi-temperature

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_e^\varepsilon + \Lambda_e \partial_x f_e^\varepsilon - E^\varepsilon(x, t) \mathcal{N}_e f_e^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (M_e(U_e^\varepsilon) - f_e^\varepsilon) + B_{ei}(f_e^\varepsilon, f_i^\varepsilon), \\ \partial_t f_i^\varepsilon + \Lambda_i \partial_x f_i^\varepsilon - E^\varepsilon(x, t) \mathcal{N}_i f_i^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (M_i(U_i^\varepsilon) - f_i^\varepsilon) + B_{ie}(f_e^\varepsilon, f_i^\varepsilon), \\ \partial_t E^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{q_e}{m_e} \rho_e^\varepsilon u_e^\varepsilon + \frac{q_i}{m_i} \rho_i^\varepsilon u_i^\varepsilon \right), \\ \partial_x E^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{q_e}{m_e} \rho_e^\varepsilon + \frac{q_i}{m_i} \rho_i^\varepsilon \right), \end{array} \right.$$

avec $U_\alpha^\varepsilon = (\rho_\alpha^\varepsilon, \rho_\alpha^\varepsilon u_\alpha^\varepsilon, \mathcal{E}_\alpha^\varepsilon)$, défini par $U_\alpha^\varepsilon = P f_\alpha^\varepsilon$, $\alpha = e, i$.

B_{ei}, B_{ie} *ad hoc* pour le second membre.

$\varepsilon \rightarrow 0$

$$u_e = u_i = u, \quad \frac{q_e}{m_e} \rho_e + \frac{q_i}{m_i} \rho_i = 0, \quad M_\alpha(U_\alpha) = f_\alpha.$$

$\rho = \rho_e + \rho_i$, $q_e = -e$ et $q_i = Ze$:

$$\rho_\alpha = c_\alpha \rho, \quad \alpha = e, i.$$

Moments:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\alpha + \partial_x(\rho_\alpha u) = 0, & \alpha = e, i, \\ \partial_t(\rho_\alpha u) + \partial_x(\rho_\alpha u^2 + p_\alpha) - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E \rho_\alpha = 0, & \alpha = e, i, \\ \partial_t \mathcal{E}_e + \partial_x(u(\mathcal{E}_e + p_e)) - \frac{q_e}{m_e} E \rho_e u = \nu_{ei}(T_i - T_e), \\ \partial_t \mathcal{E}_i + \partial_x(u(\mathcal{E}_i + p_i)) - \frac{q_i}{m_i} E \rho_i u = -\nu_{ei}(T_i - T_e). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho c_e u) + \partial_x(\rho c_e u^2 + p_e) - \frac{\rho_e q_e}{m_e} E = 0, \\ \partial_t(\rho c_i u) + \partial_x(\rho c_i u^2 + p_i) - \frac{\rho_i q_i}{m_i} E = 0 \end{cases}$$

donne

$$\frac{\rho_e q_e}{m_e} E = -\frac{\rho_i q_i}{m_i} E = c_i \partial_x p_e - c_e \partial_x p_i$$

et

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p_e + p_i) = 0$$

donc $\mathcal{U} = (\rho, \rho u, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_i)$ est solution d'Euler bi-température.

Inégalité d'entropie

Théorème Si

$$M_{\alpha,l}(U_\alpha) = \xi_{\alpha,l} U_\alpha + \zeta_{\alpha,l} F_\alpha(U_\alpha), \quad 1 \leq l \leq L, \quad \alpha = e, i$$

et

$$\sigma(M'_{\alpha,l}(U_\alpha)) \subset]0, +\infty[, \quad \alpha = e, i$$

alors si \mathcal{U} est limite du modèle BGK discret, \mathcal{U} est admissible:

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \partial_x Q(\mathcal{U}) \leq \frac{\nu_{ei}}{k_B T_i T_e} (T_i - T_e)^2.$$

Idée de la preuve. Il existe des entropies microscopiques $H_{\alpha,l}(f_l)$ (cf Bouchut 1999 pour les lois de conservation).

On multiplie l'équation l pour f_e par $H'_{e,l}(f_{e,l})$. Second membre OK.

Contribution de $E^\varepsilon(x, t) \mathcal{N}_\alpha f_\alpha^\varepsilon$ nulle.

Schéma entropique

Flux pour l'équation de transport:

$$\forall l \in \{1, \dots, L\}, \quad h_{\alpha, j+\frac{1}{2}, l} = h_{\alpha, l}(f_{\alpha, j, l}, f_{\alpha, j+1, l}), \quad h_{\alpha}(f, f) = \Lambda_{\alpha} f.$$

Hypothèse

Inégalité d'entropie discrète : si

$$\tilde{f}_{\alpha, j, l}^{n+\frac{1}{2}} = f_{\alpha, j, l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{\alpha, l}(f_{\alpha, j, l}^n, f_{\alpha, j+1, l}^n) - h_{\alpha, l}(f_{\alpha, j-1, l}^n, f_{\alpha, j, l}^n))$$

alors

$$\frac{H_{\alpha, l}(\tilde{f}_{\alpha, j, l}^{n+\frac{1}{2}}) - H_{\alpha, l}(f_{\alpha, j, l}^n)}{\Delta t} + \frac{\mathcal{G}_{\alpha, j+\frac{1}{2}, l}^n - \mathcal{G}_{\alpha, j-\frac{1}{2}, l}^n}{\Delta x} \leq 0.$$

Schéma entropique-suite

$\mathcal{U}^0 = (\mathcal{U}_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ donné:

$$U_\alpha^0 = (c_\alpha \rho, c_\alpha \rho u, \mathcal{E}_\alpha), \quad \alpha = e, i.$$

► **Etape 1: projection sur l'équilibre.**

Si au pas $n \geq 0$ on a \mathcal{U}^n , U_e^n , U_i^n avec $\rho_\alpha = \rho c_\alpha$, on pose

$$f_\alpha^n = M_\alpha(U_\alpha^n), \quad \alpha = e, i.$$

► **Etape 2: évolution.** Pour $\alpha = e, i$

$$\begin{aligned} f_{\alpha,j}^{n+\frac{1}{2}} &= f_{\alpha,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{\alpha,j+\frac{1}{2}}^n - h_{\alpha,j-\frac{1}{2}}^n) + \Delta t E_j^{n+1} \mathcal{N}_\alpha f_{\alpha,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \Delta t B_{\alpha\beta}(f_{e,j}^{n+\frac{1}{2}}, f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}), \quad \beta \neq \alpha. \end{aligned}$$

et

$$U_{\alpha,j}^{n+1} = P(f_{\alpha,j}^{n+\frac{1}{2}}) = (\rho_\alpha^{n+1}, \rho_\alpha^{n+1} u_\alpha^{n+1}, \mathcal{E}_\alpha^{n+1}).$$

Couplage Maxwell-Ampère et Poisson:

$$\begin{cases} \frac{q_e}{m_e} \rho_{e,j}^{n+1} + \frac{q_i}{m_i} \rho_{i,j}^{n+1} = 0, \\ \frac{q_e}{m_e} \rho_{e,j}^{n+1} u_{e,j}^{n+1} + \frac{q_i}{m_i} \rho_{i,j}^{n+1} u_{i,j}^{n+1} = 0. \end{cases}$$

d'où $u_{i,j}^{n+1} = u_{e,j}^{n+1}$. On pose

$$\rho_j^{n+1} = \rho_{e,j}^{n+1} + \rho_{i,j}^{n+1}, \quad u_j^{n+1} = u_{i,j}^{n+1} = u_{e,j}^{n+1}.$$

Comme $q_e = -e$ et $q_i = Ze$:

$$\rho_{e,j}^{n+1} = c_e \rho_j^{n+1}, \quad \rho_{i,j}^{n+1} = c_i \rho_j^{n+1}.$$

Notation

$$F_{\alpha,j+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_\alpha(U_{\alpha,j}, U_{\alpha,j+1}), \quad \mathcal{F}_\alpha(U_\alpha, V_\alpha) = P(h_\alpha(M_\alpha(U_\alpha), M_\alpha(V_\alpha))).$$

Consistent avec Euler conservatif:

$$\mathcal{F}_\alpha(U_\alpha, U_\alpha) = F_\alpha(U_\alpha).$$

Expression de E^{n+1} comme en continu:

$$c_e \rho_j^{n+1} u_j^{n+1} = c_e \rho_j^n u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{e,j+\frac{1}{2},2}^n - F_{e,j-\frac{1}{2},2}^n \right) + \frac{\Delta t q_e}{m_e} E_j^{n+1} \rho_{e,j}^{n+1},$$

$$c_i \rho_j^{n+1} u_j^{n+1} = c_i \rho_j^n u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i,j+\frac{1}{2},2}^n - F_{i,j-\frac{1}{2},2}^n \right) + \frac{\Delta t q_i}{m_i} E_j^{n+1} \rho_{i,j}^{n+1}.$$

Notation:

$$\delta_{j+\frac{1}{2}}^n = -c_i F_{e,j+\frac{1}{2},2}^n + c_e F_{i,j+\frac{1}{2},2}^n,$$

consistant avec $-c_i p_e + c_e p_i$.

Le schéma

$$F_{j+\frac{1}{2},k}^n = \sum_{\alpha=e,i} F_{\alpha,j+\frac{1}{2},k}^n, \quad k = 1, 2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+\frac{1}{2},1}^n - F_{j-\frac{1}{2},1}^n \right), \\ \rho_j^{n+1} u_j^{n+1} = \rho_j^n u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+\frac{1}{2},2}^n - F_{j-\frac{1}{2},2}^n \right), \\ \mathcal{E}_{e,j}^{n+1} = \mathcal{E}_{e,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{e,j+\frac{1}{2},3}^n - F_{e,j-\frac{1}{2},3}^n \right) - u_j^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\delta_{j+\frac{1}{2}}^n - \delta_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ \quad + \Delta t \nu_{ei} (T_{ij}^{n+1} - T_{ej}^{n+1}), \\ \mathcal{E}_{i,j}^{n+1} = \mathcal{E}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i,j+\frac{1}{2},3}^n - F_{i,j-\frac{1}{2},3}^n \right) + u_j^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\delta_{j+\frac{1}{2}}^n - \delta_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ \quad - \Delta t \nu_{ei} (T_{ij}^{n+1} - T_{ej}^{n+1}). \end{array} \right.$$

Théorème

Si le modèle est de la forme

$$M_{\alpha,l}(U_\alpha) = \xi_{\alpha,l} U_\alpha + \zeta_{\alpha,l} F_\alpha(U_\alpha), \quad 1 \leq l \leq L, \quad \alpha = e, i$$

et si

$$\sigma(M'_{\alpha,l}(U_\alpha)) \subset]0, +\infty[, \quad \alpha = e, i$$

alors on a des inégalités d'entropie discrètes:

$$\frac{\eta(\mathcal{U}_j^{n+1}) - \eta(\mathcal{U}_j^n)}{\Delta t} + \frac{Q_{j+\frac{1}{2}}^n - Q_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \leq - \frac{\nu_{ei}}{k_B T_{ij}^{n+1} T_{ej}^{n+1}} (T_{ij}^{n+1} - T_{ej}^{n+1})^2.$$

Test cases

Space domain: $[0,1]$ discretized with 200 points

Final time: 0.01 s.

▶ **Test case 1:** $\nu_{ei} = 0$

Initial conditions:

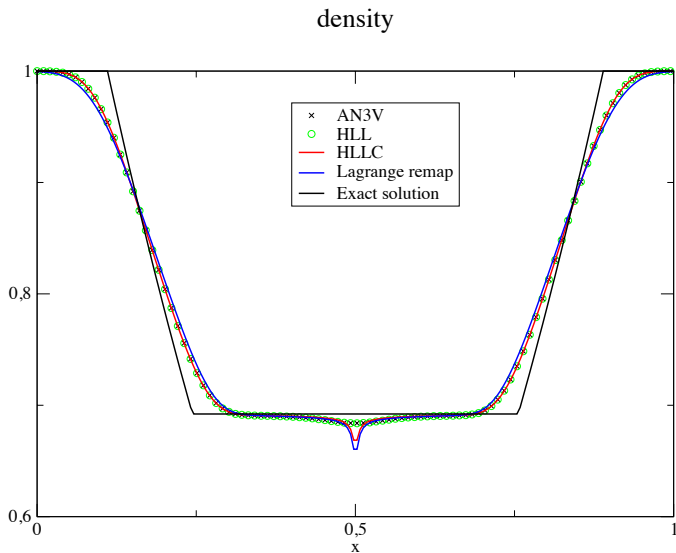
- ▶ $\rho = 1$,
- ▶ $u = -10$ on $[0, 0.5[$, $u = 10$ on $[0.5, 1]$
- ▶ $T_e = 1000$, $T_i = 1$

▶ **Test case 2:** $\nu_{ei} = 0$

Initial conditions:

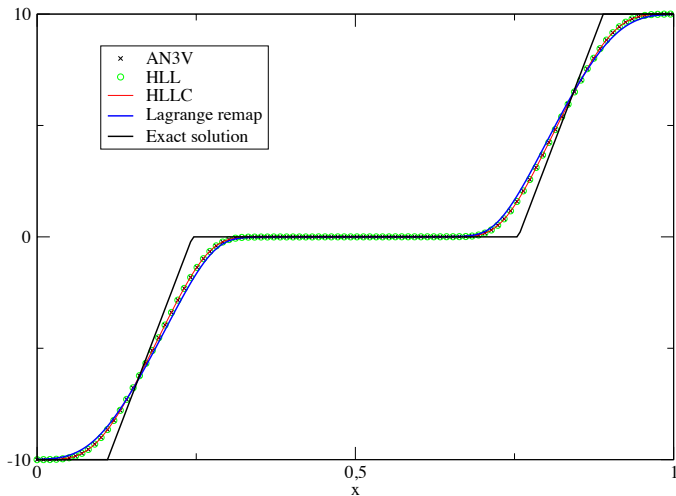
- ▶ $\rho = 1$ on $[0, 0.5[$, $\rho = 0.125$ on $[0.5, 1]$,
- ▶ $u = 0$
- ▶ $T_e = 1000$ on $[0, 0.5[$, $T_e = 800$ on $[0.5, 1]$
- ▶ $T_i = 1$ on $[0, 0.5[$, $T_i = 0.8$ on $[0.5, 1]$

Density-1st test case



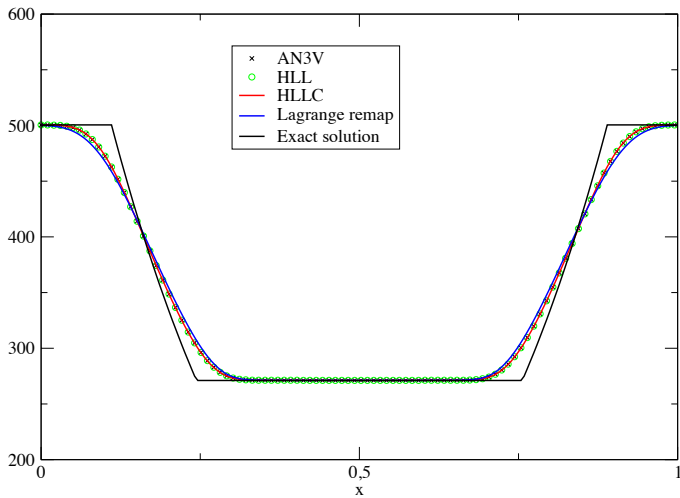
Velocity-1st test case

velocity



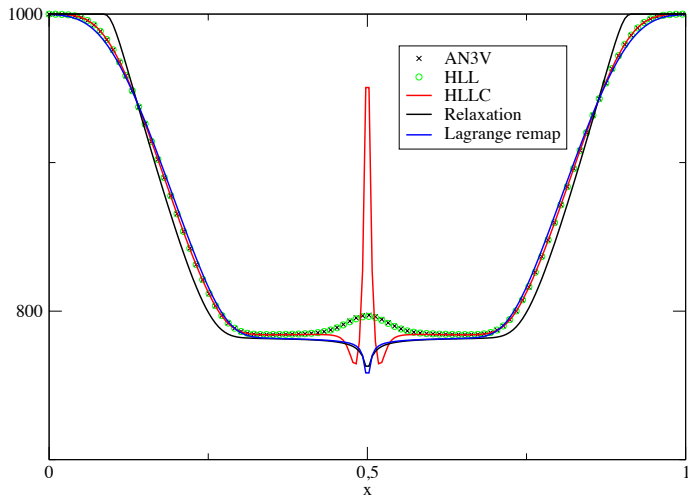
Pressure-1st test case

pressure



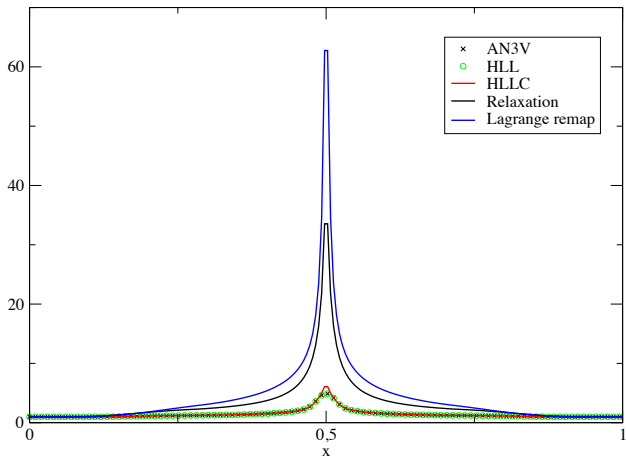
Electrons temperature-1st test case

electronic temperature



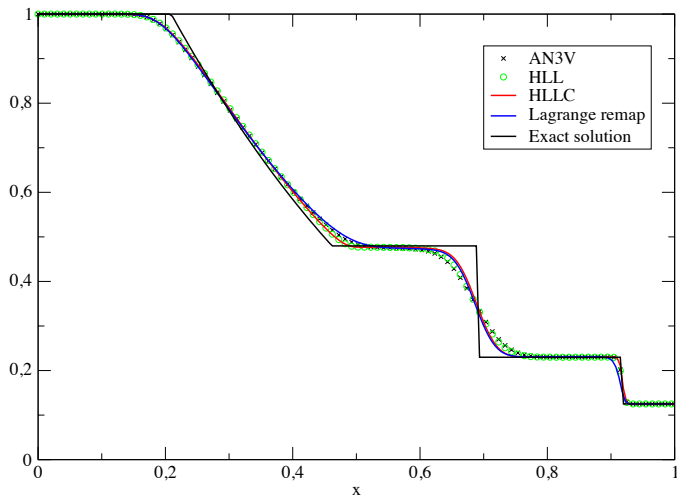
Ion temperature-1st test case

ion temperature



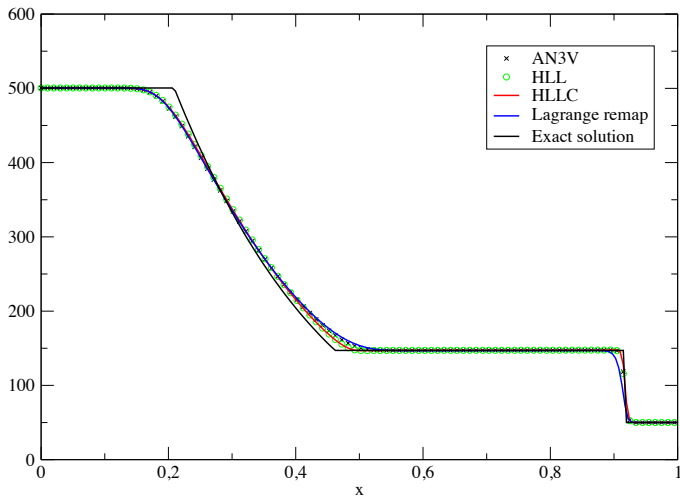
Density-2nd test case

density



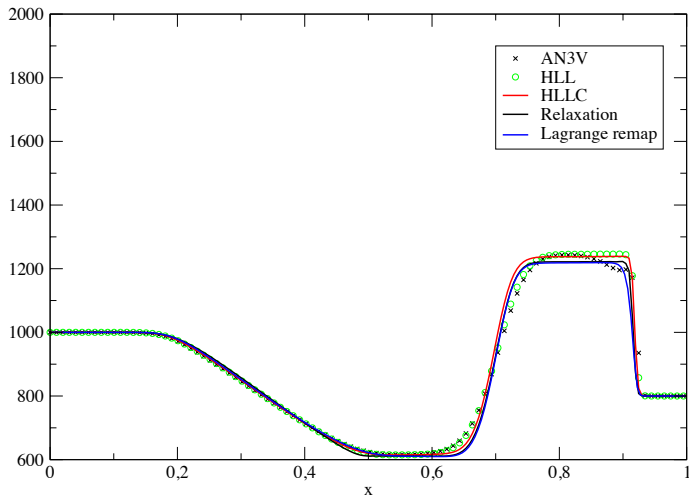
Pressure-2nd test case

Pressure



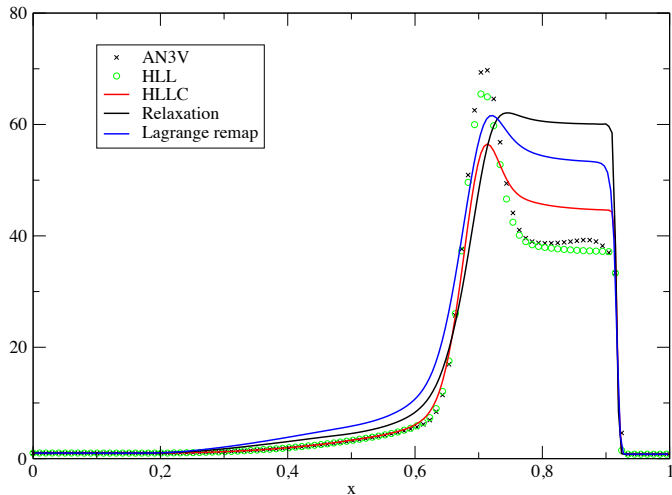
Electrons temperature-2nd test case

electronic temperature



Ions temperature-2nd test case

ionic temperature



Perspectives

1. Ordre élevé et multiD : post-doc X. Lhebrard
2. Amélioration des modèles (en particulier polyatomique)
3. Champ magnétique
4. Conditions de stabilité