Réactions de coagulation fragmentation.

Contents

1 Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des réactions de coagulation-fragmentation. Plus précisément deux réactions vont être en compétition:
La coagulation correspond à la réaction suivante: $P_i + P_j \rightarrow P_{i+j}$
C'est à dire que deux particules de tailles respectives i et j se collent pour former une particule de taille $i + j$. La vitesse de cette réaction est égale à $a_{ij}c_i c_j$ où c_i est la concentration en particules de taille i.
La fragmentation correspond à la réaction inverse, à savoir:
$P_{i+j} \rightarrow P_i + P_j$.
C'est à dire qu'une particule de taille $i + j$ se fragmente en deux particules de tailles respectives i et j. La vitesse de cette réaction est égale à: $b_{ij}c_{i+j}$
A l'équilibre, le couplage de ces deux réactions donne:
$P_i + P_j \rightleftarrows P_{i+j}$.
Soit v_{ij} la vitesse de la réaction précédente.
On a alors, $v_{ij} = a_{ij}c_i c_j - b_{ij}c_{i+j}$.
D'autre part, ces particules baignent dans un fluide en mouvement. L'application de la loi de Fick nous donne:

$$\partial_t c_i + div(j_i) = Q_i(c).$$

Si le fluide est homogène et au repos, on aura:

$$\partial_t c_i = Q_i(c).$$

$\partial_t c_i$ désigne une vitesse de réaction.
j_i est le flux dû au déplacement des particules de taille i.
$Q_i(c)$ est un terme source provenant de la vitesse de la réaction.
Or, le flux se décompose en deux termes: $j_i = u_i c_i - d_i \nabla c_i$. u_i désigne la vitesse d'entraînement des particules de taille i et d_i est la vitesse de diffusion des particules de taille i.
Le premier terme du flux: $u_i c_i$ est dû au déplacement du fluide.
Dans notre étude les vitesses d'entraînement de toutes les particules seront égales à la vitesse d'entraînement du fluide.
Le second terme du flux:$d_i \nabla c_i$ est dû à la diffusion des particules dans le fluide.
Selon la vitesse d'écoulement ou la géométrie de l'écoulement les deux phénomènes n'auront pas le même ordre de grandeur
1er cas

Dans le cadre des basses vitesses ou des fluides très visqueux (comme les goudrons), le terme de diffusion est prépondérant par rapport au terme de transport. Ces écoulements sont en général très stables.
Dans ce cas là, on aboutit à l'équation suivante:

$$\partial_t c_i - d(i)\Delta(c_i) = Q_i(c)$$

Ce cas est étudié en détail dans les articles [CP1] et [CP2].
2emecas
Lorsque le terme de transport est prépondérant sur le terme de diffusion, on aboutit à:

$$\partial_t c_i + \nabla(uc_i) = Q_i(c).$$

Cela se produit dans le cas où la vitesse d'entraînement du fluide est grande ou lorsque le fluide est peu visqueux. Contrairement au cas précédent ces écoulements sont très peu stables.
Nous allons étudier cette équation dans deux cas.
Le premier cas sera lorsque la variable de taille sera discrète.
Le second cas sera lorsque la variable de taille sera continue.
3eme cas
Lorsque les deux phénomènes sont pris en compte, on aboutit à:

$$\partial_t c_i + \nabla(uc_i) - d(i)\Delta(c_i) = Q_i(c).$$

Pour une étude plus complète au sujet des différents types d'écoulements, voir [E-Gu].

2 Cas du transport pur

2.1 Le modèle discret

2.1.1 Position du problème

On s'intéresse à l'équation suivante :

$$\partial_t(c_i)(t,x) - \nabla(u(t,x)\cdot c_i)(t,x) = Q(c)_i(t,x), i \in \{1..\infty\}; t > 0; x \in \mathbb{R}^D \quad (1)$$
$$Q(c)_i(t,x) = \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k}c_k c_{i-k} + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_{k,i}c_{i+k} - 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i}c_k c_i - \sum_{k=1}^{i-1} b_{k,i-k}c_i$$
$$c_i(0,x) = c_i^0(x); \qquad x \in \mathbb{R}^D.$$

On étudie l'évolution de la concentration de polymères soumis à une réaction de coagulation fragmentation. Un polymère est déterminé par un nombre entier de particules qu'il contient. Par exemple P_k qui est un polymère de taille k contient k particules. La concentration d'un polymère de taille k occupant la position x au temps t sera notée $c_k(t,x)$. Les polymères subissent la réaction suivante qui est une réaction de coagulation binaire:
$P_k + P_{i-k} \to P_i$
On admet en outre que, pour se coller, deux particules doivent occuper la meme position dans l'espace. Cette réaction se fait alors avec un taux de coagulation. Par ailleurs, la fonction $(i,k) \to a_{i,k}$ est appelée noyau de coagulation. Parallèlement, les polymères subissent une réaction de fragmentation binaire :
$P_{j+k} \to P_j + P_k$
Les polymères de taille $j+k$ se fragmentent en un polymère de taille j et un polymère de taille k. Le coefficient $b_{k,i}$ représente alors le taux de fragmentation de cette réaction. L'application $(i,k) \to b_{i,k}$ est alors appelée noyau de fragmentation. On remarque par ailleurs que les phénomènes de coagulation sont non linéaires, alors que les phénomènes de fragmentation sont linéaires. Précisons le second membre de l'équation :
$\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k}c_k c_{i-k}$ comptabilise la formation de polymères de taille i par coagulation de 2 polymères plus petits.
$2\sum_{k=1}^{\infty} b_{k,i}c_{i+k}$ représente le gain en polymères de taille i résultant de la frag-

mentation d'un polymère plus gros de taille $i+k$,
$2\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i}c_kc_i$ traduit la disparition des polymères P_i par coagulation avec un autre polymère,
$\sum_{k=1}^{i-1} b_{k,i-k}c_i$ représente la fragmentation des polymères de taille i en 2 polymères de taille inférieure.
$u(t,x)$ désigne alors la vitesse d'entrainement du fluide dans lequel baignent les particules. On admet en outre que toutes les particules se déplacent à la même vitesse, à savoir la vitesse du fluide.
Le fluide est supposée incompressible, c'est à dire que sa vitesse d'entraînement vérifie $div(u)(t,x) = 0$. Physiquement, cela signifie que la masse volumique de chaque élément du fluide reste constante au cours du temps.

Dans cette partie, l'essentiel de notre travail va consister à démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*
$(H1) c_i^0$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^D$, $(i,x) \mapsto \partial_x c_i^0(x)$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^D \times \mathbb{N}$ *et* $(\forall i \in \mathbb{N}), c_i^0 \geq 0$.
$(H2) \rho^0 = \sum_{i=1}^{+\infty} i c_i^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^D)$.
$(H3)$ *Le champ de vitesse* u *est à divergence nulle, de classe* C^1*, borné en espace et tel que* $\partial_x u$ *soit bornée sur* $\mathbb{R}^D$.
$(H4)$ $\forall i,k > 1$ $a_{k,i} = a_{i,k} > 0$ $b_{k,i} = b_{i,k} > 0$
A i fixé $i \in \{1...\infty\}$ $a_{i,k} = o(k)$ *et* $b_{i,k} = o(k)$
De plus $sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{k} < \infty$ *et* $sup_{i,k} \frac{b_{i,k}}{k} < \infty$.
Alors dans ce cas, le système (1) possède une solution au sens des distributions. De plus, la solution $\{c_i \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D), i \in \mathbb{N}\}$.

La preuve s'inspire de [CP2] qui démontre l'existence d'une solution pour les équations de coagulation-fragmentation dans le cas diffusif.
Nous allons raisonner en deux étapes: nous allons considérer dans un premier temps le problème tronqué. Puis, dans un second temps, nous allons passer à la limite.

2.1.2 Résolution du problème tronqué

Soit $N \in \mathbb{N}$. On va négliger dans cette partie les tailles strictement supérieure à N, en considérant le problème suivant:

$$\partial_t c_i^N(t,x) - \nabla_X(u(t,x)).(c_i^N(t,x) = (G_i^N - P_i^N)(c^N)(t,x) i = 1....N, t > 0, x \in \mathbb{R}^D \quad (2)$$

$$c_i^N(0;x) = c_i^{0,N}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^D, \quad \text{où}$$

$$c_i^{0,N} = c_i^0 \quad si \quad i \leq N \quad c_i^{0,N} = 0 \quad \text{sinon}$$

$$G_i^N(c) = \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k} c_k c_{i-k} + 2 \sum_{k=1}^{N-i} b_{k,i} c_{i+k}.$$

$$\text{et} \qquad P_i^N(c) = \nu_i^N(c) c_i \quad \text{où } \nu_i^N = \sum_{k=1}^{i-1} b_{k,i-k} + 2 \sum_{k=1}^{N-i} a_{k,i} c_{k,i}$$

On remarque au passage que le problème posé est encore non linéaire. On ne supprime donc, dans cette approximation, que la difficulté liée aux grandes tailles. Nous allons écrire le système tronqué (2) sous forme tempérée et la résoudre sous cette forme.

Proposition 1. *Sous les hypothèses du théorème 1, le système (2) possède une unique solution sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D$.

On va raisonner par un argument de point fixe. Nous allons voir que la solution du problème tronqué va être le point fixe d'une application Γ définissant une certaine itération. A cette fin, on va utiliser le lemme suivant:

Lemme 1. $Q^N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *est localement lipschitzienne sur* $\mathbb{R}^N$.

Preuve

Soit $(c;d) \in \bar{B_R}$

$$\begin{aligned} G_i^N(c) - G_i^N(d) &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k} c_k c_{i-k} + 2 \sum_{k=1}^{N-i} b_{k,i} c_{i+k}^N \\ &- \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k} d_k^N d_{i-k}^N - 2 \sum_{k=1}^{N-i} b_{k,i} d_{i+k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G_i^N(c) - G_i^N(d) &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k} c_k (c_{i-k} - d_{i-k}) + 2\sum_{k=1}^{N-i} b_{k,i}(c_{i+k} - d_{i+k}) \\
&+ \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k}(d_k - c_k)
\end{aligned}
$$

D'où , $|G_i^N(c) - G_i^N(d)| \leqslant C(N) \times \|c-d\|_{[L^\infty(\mathbb{R}^D)]^N}$
Par une démarche analogue, on montre que P^N est localement lipschitzienne
.
Ce qui démontre le lemme 1.
□

Lemme 2. *Pour tout N-uple $\{c_1.....c_N\}$ tel que, pour tout, i $c_i \geqslant 0$, nous avons le résultat suivant :* $\nu_i^N(c) \geq 0 \quad G_i^N(c) \geq 0$
$|\nu_i^N| \leq A_N \sup_{i=1..N} c_i + B_N$
$|G_i^N| \leqslant (\sup_{i=1..N} c_i^N)^2 A_N + B_N \sup_{i=1..N} c_i^N$

Pour la preuve, voir [CP2].
Soit Y_N la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dY_N}{dt} = A_N Y_N^2 + B_N Y_N \tag{3}$$

$$Y_N(0) = R_0 \qquad t > 0 \tag{4}$$

Soit T_N le temps d'existence de la solution. Soit T $\in]0,T_N[$.
On considère l'espace:

$$
\begin{aligned}
E = \{c \in [C^0([0;T] \times \mathbb{R}^D)]^N \cap (L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d))^N; c \geqslant 0; \\
\|c(t,.)\|_{[L^\infty(\mathbb{R}^d)]^N} \leqslant Y_N(t), t \in [0,T]\}
\end{aligned}
$$

On s'intéresse alors l'itération à suivante :

$$\partial_t d_i^{n+1}(t,x) + u(t,x).\nabla_x(d_i^{n+1})(t,x) = [G_i^N(d_i^n) - \nu(d_i^n) d_i^{n+1}](t,x) \tag{5}$$

$$d_i^n(0,x) = c_i^0(x). \tag{6}$$

Soit Γ l'application définissant cette itération.

Lemme 3. *Sous les mêmes hypothèses que pour le lemme précédent, E est laissé stable par Γ.*

Preuve.

1) On résout l'équation sur une caractéristique. Pour cela, on considère alors le champ $X(s,t,x)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \partial_s X(s,t,x) &= u(s, X(s,t,x)) \\ X(t,t,x) &= x \end{aligned} \tag{7}$$

Pour plus de précision à ce sujet, cf [Bou]. D'où, on obtient:

$$\partial_s c^N(s, X(s,t,x)) = \partial_t c^N(s, X(s,t,x)) + \partial_s X(t,s,x).\nabla_x c^N(s, X(s,t,x))$$

$$\partial_s c^N(s, X(s,t,x)) = \partial_t c^N(s, X(s,t,x)) + u(s, X(s,t,x)).\nabla_x c^N(s, X(s,t,x))$$

Donc, d'après l'équation 5:

$$\partial_s c^N(s, X(s,t,x)) = [G_i^N(c^N) - P_i^N(c^N)](s, X(s,t,x))$$

Soit, en intégrant la dernière inégalité entre 0 et t, on obtient:

$$\int_0^t \partial_s c^N(s, X(s,t,x)) ds = c_i^0(X(0,t,x)) + \int_0^t [Q^N(c^N)](s, X(s,t,x)) ds$$

On obtient donc,

$$c^N(s, X(s,t,x)) = c_i^0(X(0,t,x)) + \int_0^t [Q^N(c^N)](s, X(s,t,x)) ds$$

On considère alors la quantité :

$$d_i^{n+1}(\tau, X(\tau,t,x)) \exp(\int_0^\tau \nu_i^N(d^n)(s, X(s,t,x)) ds)$$

qui vérifie, lorsqu'on la dérive par rapport à τ.

$$\begin{aligned} &\partial_\tau [d_i^{n+1}(\tau, X(\tau,t,x)) exp(\int_0^\tau \nu_i^N(s, X(s,t,x))) ds)] \\ &= [\partial_t d_i^{n+1}(\tau, X(\tau,t,x)) + u(\tau, X(\tau,t,x)).\nabla_x d_i^{n+1}(\tau, X(\tau,t,x)) \\ &+ \nu_i^N(d^n)(\tau, X(\tau,t,x)) d_i^{n+1}(\tau, X(\tau,t,x))] exp(\int_0^\tau \nu_i^N(d^n)(s, X(s,t,x)) ds) \end{aligned}$$

Donc,

$$\partial_\tau [d_i^{n+1}(\tau, X(\tau,t,x)) \exp(\int_0^\tau \nu_i^N(d^n)(s, X(s,t,x))ds)]$$
$$= [G_i^N(d^n)](\tau, X(\tau,t,x)) \exp(\int_0^\tau \nu_i^N(d^n)(s, X(s,t,x)))ds)$$

En intégrant l'égalité précédente entre 0 et t, on obtient:

$$d_i^{n+1}(t,x) \exp(\int_0^t \nu_i^N(d^n)(s, X(s,t,x))ds) = d_i^0(X(0,t,x))$$
$$+ \int_0^t exp(\int_0^s \nu_i^N(d^{n)}(\sigma, X(\sigma,t,x))d\sigma)) G_i^N(d^n(s, X(s,t,x))ds$$

2

Ainsi, d'après l'égalitéprécédente, on a:

$$d_i^{n+1}(t,x) = \quad d_i^0(X(0,t,x)) \exp(-\int_0^t \nu_i^N(d^n)(s, X(s,t,x))ds \tag{8}$$
$$+ \int_0^t \exp(-\int_s^t \nu_i^N(d^n)(\sigma, X(\sigma,t,x))d\sigma)) G_i^N(d_i^n(s, X(s,t,x))ds \tag{9}$$

$d^n \in E$ donc par définition de E d^n est continue.
Donc, d'après l'égalité (8) précédente d^{n+1} est continue. De plus, comme

$$\nu_i^N(s, X(s,t,x)) \geqslant 0 \tag{10}$$

et

$$[G_i^N(d^n)](s, X(s,t,x)) \geqslant 0, \tag{11}$$

on obtient:

$$d_i^{n+1}(t,x) \geqslant d_i^0(X(0,t,x)) exp(\int_0^s \nu_i^N(d^n)(s, X(s,t,x))ds)$$

Donc,

$$d_i^{n+1}(t,x) \geqslant 0$$

D'autre part ,

$$d_i^{n+1}(t,x) \leq c_i^0(X(0,t,x)) + \int_0^t G_i^N(d^n)(s, X(s,t,x))ds$$

$$d_i^{n+1}(t,x) \leq c_i^0(X(0,t,x)) + \int_0^t \frac{dY_{N(s)}}{ds}ds$$

$$d_i^{n+1}(t,x) \leqslant R_0 + Y_N(t) - R_0$$

D'où finalement on obtient,

$$d_i^{n+1}(t,x) \leqslant Y^N(t)$$

On a ainsi démontré que l'application définissant l'itération laissait stable E. $\square$.

On va maintenant montrer que cette application est contractante pour une certaine norme de E.
Pour cela, on munit alors E de la norme suivante :

$$|||c||| = \sup_{s\in[0,T]} e^{-\omega_N s}|||c(s,)||_{[L^\infty(\mathbb{R}^d)]^N}$$

où ω_N désigne une constante qui devra être choisie suffisament grande, afin de rendre l'application Γ contractante et dont le choix va être précisé au cours de la démonstration du lemme suivant:

Lemme 4. *Il existe une constante ω_N ne dépendant que de N telle que l'application Γ soit contractante de E dans E pour la norme $|||\quad|||$.*

Preuve

En considérant deux termes consécutifs de l'itération (5), on a:

$$\partial_t d_i^{n+1}(t,x) + u(t,x).\nabla_x(d_i^{n+1})(t,x) = [G_i^N(d^n) - \nu_i^N(d^n)d^{n+1}](t,x)$$

$$\partial_t d_i^{n}(t,x) + u(t,x).\nabla_x(d_i^{n})(t,x) = [G_i^N(d^{n-1}) - \nu^N(d^{n-1})d^{n}](t,x)$$

On soustrait alors les deux dernières égatités, et on obtient :

$$\begin{aligned} &\partial_t[d_i^{n+1} - d_i^n](t,x) + u(t,x).\nabla_x(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x) \\ &= [G_i^N(d^n) - G_i^N(d^{n-1})](t,x) + \nu^N(d_i^{n-1})(t,x)d_i^n(t,x) - \nu_i^N(d_i^n)(t,x)d_i^{n+1}(t,x) \end{aligned}$$

$$\partial_t[d_i^{n+1}-d_i^n](t,x)+u(t,x).\nabla_X(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x)+\nu^N(d_i^{n)})(t,x)(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x)$$
$$=[G_i^N(d^n)-G_i^N(d^{n-1})](t,x)+d_i^n(t,x)(\nu_i^N(d_i^{n-1})-\nu_i^N(d_i^n))(t,x)$$

Or on a:

$$\partial_\tau[(d_i^{n+1}-d_i^n)(\tau,X(\tau,t,x))exp(\int_0^\tau \nu_N(d_i^n)(s,X(s,t,x))ds)]$$
$$=(\partial_t[d_i^{n+1}-d_i^n](\tau,X(\tau,t,x))+u(t,x).\nabla_x(d_i^{n+1}-d_i^n)(\tau,X(\tau,t,x))$$
$$+\nu^N(d^n)(\tau,X(\tau,t,x)(d_i^{n+1}-d_i^n)(\tau,X(\tau,t,x)])[exp(\int_0^\tau \nu^N(d_i^n)(s,X(s,t,x))ds]$$

En intégrant l'équation ci dessus entre 0 et t, l'égalité précédente, on obtient :

$$[(d_i^{n+1}-d_i^n)(\tau,X(\tau,t,x))exp(\int_0^\tau \nu_N(d_i^n)(s,X(s,t,x))ds)]$$
$$=\int_0^t([G_i^N(d^{n)}-G_i^N(d^{n-1})](\tau,X(\tau,t,x))$$
$$+d_i^n(\tau,X(\tau,t,x))[\nu_i(d^{n-1})-\nu_i(d^n)(\tau,X(\tau,t,x))]exp(\int_0^\tau \nu_N(d_i^n)(s,X(s,t,x))ds)]$$

$$(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x)\exp(\int_0^t \nu_i^N(d^n)(s,X(s,t,x))ds)$$
$$=\int_0^t[G_i^N(d^n)-G_i^N(d^{n-1})](\tau,X(\tau,t,x))d\tau$$
$$+\int_0^t d_i^n(s,X(s,t,x)))[\nu_i^N(d^{n-1})-\nu_i^N(d^n)](s,X(s,t,x))exp(\int_0^\tau \nu_i^N(d^n)(s,X(s,t,x))]ds$$

Donc,

$$(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x)=\int_0^t[G_i^N(d^n)-G_i^N(d^{n-1})](\tau,X(\tau,t,x))d\tau$$
$$+\int_0^t d_i^n(\tau,X(\tau,t,x))[\nu_i^N(d^{n-1})-\nu_i^N(d^n)](\tau,X(\tau,t,x))exp(-\int_\tau^t \nu_i^N(d^n)(s,X(s,t,x))dsd\tau$$

D'où, comme $exp(-\int_\tau^t \nu_N(d_i^n)(s,X(s,t,x))ds \leq 1$, on obtient:

$$\begin{aligned}(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x) &= \int_0^t [G_i^N(d_i^n)-G_i^N(d_i^{n-1})](\tau,X(\tau,t,x))d\tau \\ &+ \int_0^t d_i^n((\tau,X(\tau,t,x)))[\nu(d_i^{n-1})(\tau,X(\tau,t,x)) \\ &- \nu^N(d_i^n)(\tau,X(\tau,t,x))])d\tau\end{aligned}$$

Comme G_i^N est localement lipschitzienne, d_i^N est bornée et ν^N est linéaire, il existe une constante positive $C(N,T)$ telle que :

$$|(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x)| \leqslant C(N,T)\int_0^t |(d_i^{n+1}-d_i^n)(\tau,X(\tau,t,x))|d\tau$$

D'où en multipliant l'égalité précédente par $e^{-\omega_N t}$ et en prenant le sup sur la variable d'espace de la quantité: $(d_i^n-d_i^{n-1})(\tau,X(\tau,t,x))$, on obtient :

$$e^{-\omega_N t}|(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x)| \leqslant C(N,T)e^{-\omega_N t}\int_0^t e^{-\omega_N s}e^{\omega_N s}\|d_i^n-d_i^{n-1}\|_\infty(s)ds$$

En prenant maintenant le sup sur la variable de temps de la quantité: $e^{-\omega_N t}\|d_i^n-d_i^{n-1}\|_\infty(s)$, on a:

$$e^{-\omega_N t}(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x) \leqslant C(N,T)|||d_i^n-d_i^{n-1}|||e^{-\omega_N t}\int_0^t e^{\omega_N s}ds$$

$$e^{-\omega_N t}(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x) \leqslant C(N,T)|||d_i^n-d_i^{n-1}|||\frac{e^{-\omega_N t}}{\omega_N}(e^{\omega_N t}-1)$$

$$e^{-\omega_N t}(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x) \leqslant C(N,T)|||d_i^n-d_i^{n-1}|||[\frac{1-e^{-\omega_N t}}{\omega_N}]$$

Soit, par passage au sup sur t,x et i dans le premier membre, on obtient:

$$|||(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x)||| \leqslant C(N,T)|||d_i^n-d_i^{n-1}|||[\frac{1-e^{-\omega_N t}}{\omega_N}]$$

D'où en choisissant ω_N suffisament grand, de telle sorte que $\frac{2C(N,T)}{\omega_N}<1$, on obtient pour $k=\frac{2C(N,T)}{\omega_N}<1$,

$$|||(d_i^{n+1}-d_i^n)(t,x)||| \leqslant k \quad |||d_i^n-d_i^{n-1}|||$$

Ce qui achève la preuve du lemme 4. □

Démonstration de la proposition 1.

1$^{\text{ère}}$ **étape**

D'après ce qui précède, la suite $(d_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet E. Elle converge donc dans E. D'òu l'existence d'une solution pour le problème tronqué non linéaire.
L'application définissant l'itération étant contractante, on obtient l'unicité de la solution pour le probleme tronqué.
En conclusion, pour le problème non linéaire tronqué, on a montré l'existence et l'unicité de la solution sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ pour $T\in]0;T_N[$.

2$^{\text{ème}}$ **étape**

On cherche maintenant à globaliser à $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$.
On considère pour cela $\rho^N(t,x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ic_i^N(t,x)$ qui physiquement représente la masse totale des particules qui réagissent .
Au cours de cette preuve, nous allons utiliser le lemme suivant:

Lemme 5. *Soit G_i^N et P_i^N définis dans l'équation (1).*
Alors, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}[iG_i^N(c)-iP_i^N(c)]=0$

Pour la preuve, voir [CP2].

En multipliant dans (2), l'équation numéro i par i et en sommant sur i jusqu'à N, on obtient que ρ^N vérifie:

$$\partial_t(\rho^N)(t,x)+u(t,x).\nabla_x\rho^N(t,x)=0 \tag{12}$$
$$\rho^N(0,x)=\rho_0^N(x)=\sum_{i=1}^{N} ic_i^0(x)$$

ρ^N est alors solution de l'équation de transport sans second membre. Physiquement cela traduit la conservation de la masse des particules qui réagissent.

Donc en résolvant sur une caractéristique et en considérant le champ X(s,t,x) défini par l'équation (4), on obtient:

$$0 \leq \rho^N(t,x) = \rho_0^N(X(0,t,x)) \leq \rho_0(X(0,t,x)) \leqslant \|\rho^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}$$

Donc, $(\forall t \in]0,T[)(\forall i \in \{1;N\}), \|c_i^N(t,.)\|_{[L^\infty(\mathbb{R}^D)^N)} \leq \|\rho^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}$.
On choisit alors $R_0 = \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}$ et résout alors l'équation suivante:

$$\partial_t(\tilde{c}_i^N(t,x)) - \nabla(u(t,x)).\tilde{c}_i^N(t,x) = [G_i^N(\tilde{c}) - P_i^N(\tilde{c})](t,x) \qquad i = 1....N, t > 0, x \in \mathbb{R}^D \quad (13)$$
$$\tilde{c}_i(0;x) = c_i(T,x)$$

On répète le raisonnement analogue de la première étape.
On a de cette manière existence et unicité du problème tronqué sur $[0;2T] \times \mathbb{R}^D$.
Ainsi en réitérant ce procédé, on obtient l'existence et l'unicité de la solution sur $[0;T] \times \mathbb{R}^D$, pour tout $T > 0$.
En conclusion, on a montré que le système (2) possédait une unique solution sur $[0;T] \times \mathbb{R}^D$, pour tout $T > 0$.
Ce qui démontre la proposition 1.
□

2.1.3 Solution du problème

On cherche maintenant à faire tendre N vers $+\infty$ dans l'équation (2). La principale difficulté provient du caractère quadratique du second membre en c^N. De ce fait, pour pouvoir passer à la limite dans l'équation (2), nous allons devoir récupérer de la compacité forte pour la suite c^N.

Proposition 2. *Pour tout compact* $[0;T] \times K$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D$*, la suite* $(c_i^N)_{N\in\mathbb{N}}$*, est compacte dans* $C^0([0;T] \times K)$*.*

L'idée directrice de la preuve de cette proposition est l'utilisation du théorème d'Ascoli. Pour cela on va montrer que les suites de fonctions $\partial_t c_i^N$ et $\partial_x c_i^N$ sont bornées indépendamment de N.

Preuve de la proposition.

On se place sur $[0,T]\times\mathbb{R}^D$.

$$c_i^N(t,x) = c_i^0(X(0,t,x)) + \int_0^t [Q_i^N(c)](s,X(s,t,x))ds$$

$$\forall j \in \{1..D\},$$

$$\partial_{x_j}(c_i^N)(t,x) = \partial_{x_j}[c_i^0(X(0,t,x))] + \int_0^t \partial_x[Q_i^N(c)](s,X(s,t,x))\partial_x X(s,t,x)ds$$

$$\forall j \in \{1..D\},$$

$$\partial_x(c_i^N) = \partial_x(c_i^0)(X(0,t,x))[\partial_x X(0,t,x)] + \int_0^t \partial_x[Q_i^N(c)](s,X(s,t,x))\partial_x X(s,t,x)ds$$

La formule précédente indique que nous allons devoir estimer les quantités $\partial_t X(s,t,x)$ et $\partial_x X(s,t,x)$. A cette fin, nous allons utiliser le lemme suivant:

Lemme 6. *Si u est C^1 et bornée sur $[0;T]\times\mathbb{R}^D$ et si $\partial_x u(t,x)$ est bornée sur $[0;T]\times\mathbb{R}^D$ alors $\partial_x X$ et $\partial_t X$sont bornées sur $[0;T]^2\times\mathbb{R}^D$.*

Preuve.

On a

$$X(s,t,x) = x + \int_t^s u(\sigma, X(\sigma,t,x))d\sigma$$

Donc, en dérivant par rapport à la variable d'espace, on obtient:

$$\partial_x X(s,t,x) = 1 + \int_t^s \partial_X u(\sigma, X(\sigma,t,x)\partial_x X(\sigma,t,x)d\sigma$$

Or, d'après l'hypothèse (3) du théorème (1), $\partial_x u$ est bornée sur $[0;T]\times\mathbb{R}^D$
Donc, il existe une constante $M\in\mathbb{R}_+$ indépendante de t et de x, telle que:

$$|\partial_x u(t,x)| \leq M_0$$

Donc,

$$|\partial_x X(s,t,x)| \leq 1 + M(\int_s^t |\partial_x X(\sigma,t,x)|d\sigma)$$

Soit, par application du lemme de Gronwall, on obtient:

$$(\forall (s,t,x) \in [0;T]^2 \times \mathbb{R}^D) |\partial_x X(s,t,x)| \leq (e^{Mt} - e^{Ms})$$

Finalement, $\partial_x X(s,t,x)$ est bornée sur $[0;T]^2 \times \mathbb{R}^D$.
D'autre part, en dérivant par rapport à la variable de temps, on obtient:

$$\partial_t X(s,t,x) = -u(t,x) + \int_t^s \partial_X u(\sigma, X(\sigma,t,x)) \partial_t X(\sigma,t,x) d\sigma$$

Or, d'après l'hypothèse (3) du théorème (1), u est bornée sur $[0;T] \times \mathbb{R}^D$. Donc, il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ indépendante de t et de x telle que: $(\forall (t,x) \in [0;T] \times \mathbb{R}^D), |u(t,x)| \leq K$
Donc,

$$\partial_t X(s,t,x) = K + M \int_t^s \partial_t X(\sigma,t,x) d\sigma$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient alors:

$$|\partial_t X(s,t,x)| \leq K(\exp(Mt) - \exp(Ms))$$

Finalement, $\partial_t X(s,t,x)$ est bornée sur $[0;T]^2 \times \mathbb{R}^D$.
Ce qui montre le lemme 6.
$\square$

Suite de la preuve de la proposition 2.

$$\partial_x [G_i^N(c^N)](t,x) = \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k} [\partial_x (c_k^N) c_{i-k}^N + c_k^N \partial_x (c_{i-k}^N)](t,x) + 2 \sum_{k=1}^{N} b_{k,i} \partial_x (c_{i+k}^N)(t,x)$$

On cherche pour c_i^N une borne dans $L^\infty((0,T); \mathbb{R}^D)$ indépendante de N.
On a: $\rho_0^N = \sum_{i=1}^{N} i c_i^0$ et $\rho_0 = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i^0$, avec $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^D)$.
On a donc: $(\forall x \in \mathbb{R}^D), \rho_0^N(x) \leqslant \rho_0(x)$.

D'après l'expression de $\rho^N(t,x)$, on a: $(\forall i \in \mathbb{N}), c_i^N \leq \rho^N$.
Or, comme $(\forall x \in \mathbb{R}^D), \rho_0^N(x) \leqslant \rho_0(x)$, on obtient la majoration suivante pour c_i^N:

$$c_i^N \leqslant \|\rho_0^N\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leqslant \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leqslant M_0 \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k}\partial_x c_k^N(t,x)c_{i-k}^N(t,x) \leqslant \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{k,i-k}}{i-k}\partial_x c_k^N(t,x)(i-k)c_{i-k}^N(t,x)$$

Or d'après l'hypothèse $H4$, on a $\sup_{i,k\in\mathbb{N}} fraca_{k,i}i < \infty$.
Donc,

$$\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k}\partial_x c_k^N(t,x)c_{i-k}^N(t,x) \leqslant AM_0(\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_x c_i^N(t,x)|)$$

De même,

$$\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k}\partial_x c_{i-k}^N(t,x)c_k^N(t,x) \leqslant AM_0(\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_x c_i^N(t,x)|)$$

De plus, en considŕant l'hypothèse (4) du théorème (2).

$$|\sum_{k=1}^{N-1} b_{k,i}\partial_x(c_{i+k}^N(t,x))| \leqslant B(\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_x c_i^N(t,x)|)$$

où B est une constante indépendante de k,i,t,x.
D'où finalement, il existe une constante C indépendante de t,x,i et N, vérifiant:

$$|\partial_x[G_i^N(c^N)](t,x)| \leqslant C(\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x\in G^D} |\partial_x c_i^N(t,x)|)$$

Par une démarche analogue, on montre qu'il existe une constante D indépendante de t,x,i et N, vérifiant:

$$|\partial_x[P_i^N(c^N)](t,x)| \leq D(\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_x c_i^N(t,x)|)$$

On obtient donc l'estimation suivante:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^D} \|\partial[c_i^N(t,x)]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leq C + \alpha \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}^D} \|\partial[c_i^N(s,x)]\|_{L^\infty(G^D)} ds$$

où α et C désignent des constantes indépendantes de t, x et N.
D'après le lemme de Gronwall,

$$(\forall t \in [0;T]), \|\partial_x c^N(t,x,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leq C \exp(\int_0^t \alpha ds)$$

$$(\forall t \in [0;T]), \|\partial_x c^N(t,x,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leq C e^{\alpha t}$$

Dérivons maitenant par rapport au temps:

$$\begin{aligned} \partial_t c(t,x,z) &= \partial_X c_i^0(X(0,t,x),z)\partial_t X(0,t,x) + \partial_X Q^N(c_i^N)(s,X(s,t,x))\partial_t X(t,t,x) \\ &+ \int_0^t \partial_X Q^N(c_i^N)(s,X(s,t,x))\partial_t(s,t,x) ds \end{aligned}$$

D'où, on obtient:

$$\begin{aligned} |\partial_t c(t,x,z)| &\leq |\partial_X c^0(X(0,t,x),z)\partial_t X(0,t,x)| \\ &+ D \sup_{z\in\mathbb{R}_+} \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_X Q^N(c^N)(s,X(s,t,x),z)\partial_t X(t,t,x)| \\ &+ C \int_0^t \sup_{z\in\mathbb{R}_+} \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_X c^N(s,x,z)| ds \end{aligned}$$

D'après, le lemme 6, $\partial_t X(t,t,x)$ et $\partial_t X(0,t,x)$ sont bornées. Il existe donc, 2 constantes D_1 et C_1 indépendantes de x, t, i et N vérifiant:

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \|\partial_t c_i(t,x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leqslant D + C \int_0^t \sup_{i\in\mathbb{N}} \|\partial_X c_i^N\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}$$

D'où,

$$(\forall \in [0;T]), sup_{i\in\mathbb{N}} \|\partial_t c_i(t,x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leqslant D + C \int_0^T e^{\alpha s} ds \leqslant C_T$$

où C_T est une constante ne dépendant que de T.
Ainsi, la suite c_i^N est équicontinue sur $[0;T] \times \mathbb{R}^D$, donc en particulier sur

$[0;T] \times \bar{B_R}$, pour tout $R > 0$. Par application du théorème d'Ascoli, on obtient que la suite $(c_i^N(t,x))_{N\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $C^0([0;T] \times \bar{B_R})$ à i fixé. Ce qui achève la preuve de la proposition (2).
□

Donc, par un procédé diagonal, on obtient l'existence d'une sous suite $c^{\phi(N)}$ de c^N telle que $(\forall i \in \mathbb{N}) c_i^{\phi(N)}$ converge vers une fonction continue c_i sur tout compact de la forme $[0;T] \times \bar{B_R}$.
On remarque au passage que le caractère discret de la variable de taille i, nous a permis d'opérer une extraction diagonale sur la variable i.Grâce à cela, on a obtenu une extraction diagonale sur la suite c_i^N qui soit indépendante de N. Cette commodité ne sera plus valable lorsque nous aurons une variable de taille continue.

Preuve du théorème 1

On considère maintenant une fonction test
$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D)$.
Soit $T > 0$ et $R > 0$ tels que $\mathrm{Supp}\varphi \subset [0;T] \times \bar{B_R}$.
On multiplie l'équation(2) par φ et on intègre en temps et en espace:

$$(\forall \varphi \in C_c^\infty([0;T[\times\mathbb{R}^D), (\forall i \in \mathbb{N}), \tag{15}$$
$$\int_0^T \int_{\bar{B_R}} (\partial_t c_i^N \varphi)(t,x)dxdt \quad + \int_0^T \int_{B_R} u(t,x) \cdot \nabla_X(c_i^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt$$
$$= \int_0^T \int_{\bar{B_R}} Q_N(c_i^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt$$

Or,

$$\int_0^T \int_{\bar{B_R}} (\partial_t c_i^N)\varphi(t,x)dxdt = -\int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)\partial_t\varphi(t,x)dxdt + \int_{\bar{B_R}} c_i^{0,N}(x)\varphi(0,x)dx$$

De plus, par convergence uniforme de la suite c_i^N sur tout compact de $[0;T] \times \bar{B_R}$, on obtient:

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)\partial_t\varphi(t,x)dxdt = \int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i(t,x)\partial_t\varphi(t,x)dxdt$$

En outre, si l'on considère que $u \in C^1(]0;T[\times \bar{B_R})$,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^T\int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)\nabla_x[u(t,x)\cdot\varphi(t,x)]dxdt = \int_0^T\int_{\bar{B_R}} c_i(t,x)\nabla_X(u(t,x)\cdot\varphi(t,x)dxdt$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite dans le terme de droite de (15).

D'autre part, $G_i^N(c^N) = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k^N c_{i-k}^N + 2\sum_{k=1}^{N-i} b_{ki}c_{i+k}^N$

On va alors montrer que:

$\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k}c_k^N c_{i-k}^N$ converge vers $\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k}c_k c_{i-k}$ uniformément sur $[0;T]\times\ \bar{B_R}$.

$$|\sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k^N c_{i-k}^N - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k c_{i-k}| \leq \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k^N(c_{i-k}^N - c_{i-k}) + \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_{i-k}^N(c_k^N - c_k)$$

Or, $c_k^N \leq M_0$ et $c_{i-k} \leq M_0$. Par conséquent

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k^N c_{i-k}^N - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k c_{i-k}| \leq\ & \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}M_0\|c_{i-k}^N - c_{i-k}\|_{L^\infty([0;T]\times\bar{B_R}} \\ & + \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}M_0\|c_k^N - c_k\|_{L^\infty([0;T]\times\bar{B_R}}\end{aligned}$$

Ainsi par passage au sup sur les variables de temps et d'espace

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k^N c_{i-k}^N - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k c_{i-k}\|_{L^\infty([0;T]\times\bar{B_R}} \leq\ & \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}M_0\|c_{i-k}^N - c_{i-k}\|_{L^\infty([0;T]\times\bar{B_R}} \\ & + \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}M_0\|c_k^N - c_k\|_{L^\infty([0;T]\times\bar{B_R}}\end{aligned}$$

Or, $\lim_{N\to+\infty}\|c_k^N - c_k\|_{L^\infty([0;T]\times\bar{B_R})} = 0$
et $\lim_{N\to+\infty}\|c_{i-k}^N - c_{i-k}\|_{L^\infty([0;T]\times\bar{B_R})} = 0$
Soit par passage à la limite supérieure dans le premier membre, on obtient

$$limsup_{N\to+\infty}\|\sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k^N c_{i-k}^N - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki-k}c_k c_{i-k}\|_{L^\infty([0;T]\times\bar{B_R}} = 0$$

On en conclut donc, que:
$\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k} c_k^N c_{i-k}^N$ converge vers $\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-k} c_k c_{i-k}$ uniformément

Montrons maintenant que $\sum_{k=1}^{N-i} a_{k,i} c_k^N c_i^N$ converge vers $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i$ uniformément

Or,

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i - \sum_{k=1}^{N-i} a_{k,i} c_k^N c_i^N| \leq |\sum_{k=K-i+1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i| + |\sum_{k=1}^{K} a_{k,i} c_k^N c_i^N - a_{k,i} c_k c_i| + \sum_{K-i+1}^{N-i} a_{k,i} c_k^N c_i^N$$

En premier lieu, en utilisant que $ic_i \leq M_0$.

$$\sum_{k=K-i+1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i \leq \sum_{k=K-i+1}^{\infty} a_{k,i} c_k \frac{M_0}{i}$$

Donc, en utilisant que $\sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{k}$ est finie, on obtient:

$$\sum_{k=K-i+1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i \leq \sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{i} M_0 \sum_{k=K-i+1}^{\infty} \frac{k}{K-i+1} c_k$$

Or,

$$\sum_{k=K-i+1}^{\infty} k c_k \leq M_0$$

. Finalement, on obtient,

$$\sum_{k=K-i+1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i \leq \frac{M_0^2}{K-i+1} \sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{k}$$

avec $\lim_{K \to +\infty} \frac{M_0^2}{K-i+1} \sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{k} = 0$ Par un raisonnement analogue, on a:

$$\sum_{K-i+1}^{N-i} a_{k,i} c_k^N c_i^N \leq \frac{M_0^2}{K-i+1} \sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{k}$$

De plus,

$$|\sum_{k=1}^{K} a_{k,i} c_k^N c_i^N - a_{k,i} c_k c_i| \leq \| \sum_{k=1}^{K} a_{k,i} c_k^N c_i^N - a_{k,i} c_k c_i \|_\infty$$

avec, $\lim_{N\to+\infty} \| \sum_{k=1}^{K} a_{k,i} c_k^N c_i^N - a_{k,i} c_k c_i \|_\infty = 0$, Finalement, on a:

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i - \sum_{k=1}^{N-i} a_{k,i} c_k^N c_i^N| \leq 2\frac{M_0^2}{K-i+1} \sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{i} + \| \sum_{k=1}^{K} a_{k,i} c_k^N c_i^N - a_{k,i} c_k c_i \|_\infty$$

Soit, par passage au sup sur la variable de temps et d'espace,

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i - \sum_{k=1}^{N-i} a_{k,i} c_k^N c_i^N \|_\infty \leq 2\frac{M_0^2}{K-i+1} \sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{i} + \| \sum_{k=1}^{K} a_{k,i} c_k^N c_i^N - a_{k,i} c_k c_i \|_\infty$$

On considère alors la limite supérieure sur N du premier membre. On obtient alors:

$$\limsup_{N\to+\infty} \| \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i - \sum_{k=1}^{N-i} a_{k,i} c_k^N c_i^N \|_\infty \leq 2\frac{M_0^2}{K-i+1} \sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{i}$$

On fait alors tendre K vers $+\infty$ et on obtient le résultat.
Les autres termes s'obtiennent de manière analogues. Ainsi, $G_i^N(c^N)$ converge vers $G_i(c)$ uniformément sur $[0;T] \times \bar{B_R}$. Egalement, $P_i^N(c^N)$ converge vers $P_i(c)$ uniformément sur $[0;T] \times \bar{B_R}$.
Donc,

$$(\forall \varphi \in C_c^\infty([0;T[\times \mathbb{R}^D), (\forall i \in \mathbb{N}),$$
$$\lim_{N\to+\infty} \int_{[0;T[\times \bar{B_R}} (Q_i^N(c^N)\varphi)(t,x)dxdt = \int_{[0;T[\times \bar{B_R}} (Q_i(c)\varphi)(t,x)dxdt$$

On passe alors à la limite dans l'équation au sens des distributions dans l'équation (2).

$$(\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D), \qquad (\forall i \in \mathbb{N}),$$
$$\int_{\mathbb{R}_+\times \bar{B_R}} \partial_t c_i(t,x)\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}_+\times \bar{B_R}} \nabla_X (c(t,x)\cdot u(t,x))\varphi(t,x)dxdt$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+\times \bar{B_R}} (Q_i(c)\varphi)(t,x)dxdt$$

En conclusion, on a montré que le système (1) possédait une solution dans $D'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D)$.
De plus comme la suite $(c_i^N)_{N\in\mathbb{N}}$ est continue et converge vers (c_i) uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D$. Ainsi, (c_i) est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D$.

2.1.4 Perspectives

Nous avons montré que l'on avait existence d'une solution de l'équation (2), dans le cas d'un champ de vitesse C^1 et borné. Or, il serait physiquement plus réaliste de considérer des champs de vitesse H^1.
On utilise alors que $C^1_b([0;T] \times \mathbb{R}^D$ est dense $H^1([0;T] \times \mathbb{R}^D)$
Ainsi en revenant à l'equation (2), on a que:

$$\begin{aligned} \partial_t(c_i^n)(t,x) - \nabla(u^n(t,x)c_i^n)(t,x) = Q(c^n)_i(t,x), \\ (c_i^n)(0,x) = c_i(0,x) \end{aligned} \tag{16}$$

Le problème qui se pose alors est l'existence d'un second membre, car la théorie des solutions renormalisées de Diperna-Lions s'applique pour l'équation de transport sans second membre. Or, si l'onconsidère la masse totale ρ, elle vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho)(t,x) - \nabla(u^n(t,x)\rho)(t,x) = 0 \\ (\rho^n)(0,x) = \rho(0,x) \end{aligned} \tag{17}$$

On suppose que $u \in C^0(([0;T], H^1(\mathbb{R}^D)) \cap C^0(([0;T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^D)) \cap H^1([0;T] \times \mathbb{R}^D)$
Et que $u \in O(|x|)$.
Donc, $u \in C^0(([0;T], L^2(\mathbb{R}^D))$.
On peut cependant obtenir des résultats sur la suite ρ que l'on aimerait transmettre chaque suite c_i^n.

Lemme 7. *ρ^n est solution renormalisée de l'équation de transport.*

Preuve
Soit $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ telle que β soit bornée et nulle à l'infini. Alors:

$$\partial_t[\beta(\rho^n)](t,x) + u_n(t,x) \cdot \nabla\beta(\rho^n) rho^n(0;x) = \rho_0(x) \tag{18}$$

Soit,

$$\beta'(\rho^n)(t,x))[\partial_t(\rho^n)(t,x) + u_n(t,x) \cdot \nabla(\rho^n)] = 0$$

D'où, ρ^n est une solution renormalisée de l'equation de transport.
Ce qui achève la preuve.
On peut alors maintenant obtenir des résultats de stabilité sur la suite ρ^n.

Lemme 8. *$\rho^n \to \rho$ dans $C^0([0;T]; L^\infty(\mathbb{R}^d)$*

preuve

$u_n \in C_b^1([0;T] \times \mathbb{R}^D)$
Donc, $u_n \in L^1_{loc}([0;T] \times \mathbb{R}^D)$ et $div(u_n) = 0 \in C_c([0;T] \times \mathbb{R}^D)$
$u \in C^0([0;T]; H^1(\mathbb{R}^D)$. Donc, $u \in L^1([0;T]; L^2(\mathbb{R}^D)$. D'où, $u \in L^1([0;T]; L^2_{loc}(\mathbb{R}^D)$.
Car,$L^2_{loc} \subset L^1_{loc}$.
Comme $\frac{1}{1+|x|} \in L^2(\mathbb{R}^D)$ alors, $\frac{u(t,x)}{|x|+1} \in L^1([0;T]; L^2(\mathbb{R}^D)$.
De plus, comme $u(t,x) = O(|x|), alors \frac{u(t,x)}{|x|} \in L^1([0;T]; L^\infty(\mathbb{R}^D))$.
De $\rho^n(0) = \rho_0$.
Donc, d'après la théorie de Diperna-Lions,

$$\rho^n \to \rho \quad \text{dans} \quad C^0([0;T], L^\infty(\mathbb{R}^D).$$

Ce qui achève la preuve du lemme.
□

Donc, ρ^n est bornée dans $L^\infty([0;T], L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^D)$.
Donc, $(\forall i \in \mathbb{N}), c_i^n$ est bornée dans $L^\infty([0;T], L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^D))$.

Lemme 9. *ρ^n converge vers ρ dans $L^2([0;T]; L^2_{loc}(\mathbb{R}^D)$ fort.*

Preuve

ρ^n est solution de (18).
(ρ_n^2) est alors une solution renormalisée de l'équation de transport (18). Ainsi,

$$[\partial_t(\rho^n)^2(t,x) + u_n(t,x) \cdot \nabla(\rho^n)^2] = 0(\rho)^2(0;x) = (\rho_0)^2(x)$$

Alors, si X_n désigne le champ de vecteur tel que:

$$\partial_t X_n(s,t,x) = u_n(t,x)$$
$$X_n(t,t,x) = x$$

On obtient ainsi en résolvant sur une caractéristique comme dans la partie (2) ,

$$(\rho^n)^2(t,x) = \rho_0^2(X_n(0,t,x))$$

Ainsi, $(\rho^n)^2(t,x) \leq \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}$.
(ρ^n) est donc bornée dans $L^2([0;T] \times \mathbb{R}^D)$.
Donc, d'après la théorie de Diperna-Lions, on obtient que: $(\rho^n)^2$ converge vers $(\rho_0)^2$ dans $C^0([0;T]; L^2_{loc}(\mathbb{R}^D))$ fort.

Soit en particulier, $(\rho^n)^2$ converge vers $(\rho_0)^2$ dans $L^2([0;T];L^2_{loc}(\mathbb{R}^D))$ fort.
Ce qui termine la preuve du lemme.
$\square$.

On aimerait alors transmettre ces résultats de stabilité à la suite (c_i^n).
Ce qui reste un problème ouvert.

2.2 Le modèle continu

2.2.1 Position du problème

On s'intéresse maintenant à l'équation suivante:

$$\partial_t(c)(t,x,z) - \nabla(u(t,x)c)(t,x,z) = Q(c)(t,x,z). \tag{19}$$

$$Q(c)(t,x,z) = \int_0^z a(y,z-y)c(t,y,z)c(t,x,z-y)$$

$$+2\int_0^{+\infty} b(z,y)c(t,x,z+y)$$

$$-2\int_0^{+\infty} a(z,y)c(t,x,y)c(t,x,z)dy - \int_0^z b(y,z-y)c(t,x,z)dy$$

$$c(0,x,z) = c^0(x,z); x \in \mathbb{R}^D; z \in \mathbb{R}_+.$$

On considère le même modèle que le précédent. La seule différence est que les particules sont regardées de beaucoup plus près; avec un microscope par exemple. Maintenant, les particules ne sont plus considérées comme étant ponctuelles et chacune possède un certain rayon, caractérisé par la variable $z \geq 0$.

Dans l'équation, t et x désignent toujours respectivement les variables de temps et d'espace. z désigne alors la variable de taille des particules qui est maintenant une quantité continue.

$\int_0^z a(y,z-y)c(t,y,z)c(t,x,z-y) - 2\int_0^{+\infty} a(z,y)c(t,x,y)c(t,x,z)$ désigne le terme de coagulation.

$\int_0^{+\infty} b(z,y)c(t,x,z+y) - \int_0^z b(y,z-y)c(t,x,z)$ désigne le terme de fragmentation.

De manière analogue au cas précédent, le second membre se décompose en:

$$G(t,x,z) = \int_0^z a(y,z-y)c(t,y,z)c(t,x,z-y)dy + 2\int_0^{+\infty} b(z,y)c(t,x,z+y)dy$$

Et en

$$P(t,x,z) = c(t,x,z)\nu(t,x,z)$$

où

$$\nu(t,x,z) = 2\int_0^{+\infty} a(z,y)c(t,x,y)dy + \int_0^z b(y,z-y)dy$$

Dans cette partie, l'essentiel de notre travail va être de démontrer le théorème suivant:

Théorème 2. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*
$(H1)c^0$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}_+$.
$\partial_z c^0$ *et* $\partial_x c^0$ *sont bornées sur* $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}_+$
$(H2)\rho^0(x) = \int_0^{+\infty} zc^0(x,z)dz \in L^\infty(\mathbb{R}^D)$.
$(H3)$ *Le champ de vitesse u est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D$*, à divergence nulle, bornée en espace et telle que* $\partial_x u$ *soit bornée en espace.*
$(H4)$ *Il existe deux constantes* M_1 *et* M_2 *telles que* $a(z,y) \leq M_1(1+z)^\alpha(1+y)^\alpha$ *et* $b(z,y) \leq M_2(1+z)^\alpha(1+y)^\alpha$ *où* $\alpha \in]0;1[$.
$(H5)$ *a et b sont localement bornées.*
Alors, il existe $T > 0$ *tel que (20) admette une solution sur* $[0;T] \times \mathbb{R}^D$ *au sens des distributions.*

2.2.2 Résolution du problème tronqué

On choisit de négliger les particules de grande taille. On considère alors les quantités suivantes:
Soit $a^N(x,y) = min(a(x,y);N)$ et $b^N(x,y) = min(b(x,y);N)$
On cherche alors à résoudre:

$$\partial_t(c^N)(t,x,z) - \nabla_x(u(t,x)c^N)(t,x,z) = G^N(t,x,z) - P^N(t,x,z) \quad (20)$$

$$\text{Où, } G^N(t,x,z) = \int_0^z a^N(y,z-y)c^N(t,y,z)c^N(t,x,z-y)dy + 2\int_0^N b^N(z,y)c^N(t,x,z+y)$$

$$\text{Et,} \qquad P^N(t,x,z) = c^N(t,x,z)\nu^N(t,x,z)$$

$$\text{avec} \qquad \nu^N(t,x,z) = 2\int_0^N a^N(z,y)c^N(t,x,y)dy + \int_0^z b^N(y,z-y)dy$$

Proposition 3. *Le problème tronqué (9) possède une unique solution sur* $[0;T] \times \Omega$

Pour pouvoir démontrer cette proposition nous allons à nouveau utiliser un argument de point fixe. Pour cela nous allons utiliser le lemme suivant:

Lemme 10. $G^N : L^\infty([0;N]) \to L^\infty([0;N])$
$f \mapsto \int_0^z a^N(y,z-y)f(y)f(z-y)dy + 2\int_0^N b^N(z,y)f(z+y)dy$
est localement lipschitzienne sur $L^\infty([0;N])$ *muni de la norme du sup .*

Preuve
Soient (x,t) fixés et (f;g) $\in \bar{B_R}$.
Alors:

$$\begin{aligned}
[G^N(f) - G^N(g)](z) &= \int_0^z a^N f(y,z-y)f(y)f(z-y)dy \\
&- \int_0^z a^N(y,z-y)g(y)g(z-y)dy \\
&+ 2\int_0^N b^N(z,y)[f(z+y) - g(z+y)]dy
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
[G^N(f) - G^N(g)](z) &= \int_0^z a^N[f(y) - g(y)]f(z-y)dy + 2\int_0^N b^N(z,y)[f(z+y) - g(z+y)]dy \\
&- \int_0^z a^N(y,z-y)g(y)[f(z-y) - g(z-y)]dy
\end{aligned}$$

Soit, par passage aux normes,

$$\begin{aligned}
[G^N(f) - G^N(g)](z) &= \int_0^z a^N dy \|f-g\|_{L^\infty([0;N])} R + 2\int_0^{N-z} b^N(z,y)dy \|f-g\|_{L^\infty([0;N])} \\
&- \int_0^z a^N(y,z-y)dyR\|f-g\|_{L^\infty([0;N])}
\end{aligned}$$

Donc, il existe une constante C(N,R) telle que:

$$\|G^N(f)(z) - G^N(g)(z)\|_{L^\infty([0;N])} \leq C(N,R)\|f-g\|_{L^\infty([0;N])}$$

On obtient ainsi que G^N est localement lipschitzienne. De même, on montre que P^N est localement lipschitzienne.
Ce qui achève la preuve du lemme.
□

Soit, alors Y la solution du problème de Cauchy suivant:

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dt}(t) = AY^2(t) + BY(t) \qquad t > 0 \\
Y(0) = R_0
\end{aligned} \tag{21}$$

Soit $T_\star$ le temps d'existence de cette solution. Soit T$\in]0;T_\star[$.
Soit,

$$E = \{c \in C^0([0;T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}_+) \cap L^\infty([0;T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}_+),$$
$$c \geq 0 \quad tq : (\forall (t,x,z) \in]0;T] \times \bar{B}(0;N) \times [0;N]), c(t,x,z) \leq Y(t)\}$$

On considère alors l'itération suivante:

$$\partial_t d^{n+1}(t,x,z) + u(t,x).\nabla_x(d^{n+1}(t,x,z)) = [G^N(d^n) - \nu(d^n)d^{n+1}](t,x,z)$$
$$d^n(0,x,z) = c^0(x,z).$$

Soit, Γ l'application définissant cette itération.

Lemme 11. *E est laissé stable par Γ*

Preuve Supposons que $d^n \in E$

1 On s'intéresse maintenant à, $d^{n+1}(\tau, X(\tau,t,x),z)\exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)$.
En dérivant cette quantité par rapport à τ, on obtient:

$$\partial_\tau[d^{n+1}(\tau,X(\tau,t,x),z)exp(\int_0^\tau \nu^N(s,X(s,tx),z))(d^n(s,X(s,t,x),z)ds)]$$
$$= [\partial_t d^{n+1}(\tau,X(\tau,t,x),z) + u(\tau,X(\tau,t,x)).\nabla_X d^{n+1}(\tau,X(\tau,t,x),z)$$
$$+\nu^N(d^n)(\tau,X(\tau,t,x),z))d^{n+1}(\tau,X(\tau,t,x),z)]exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)((s,X(s,t,x),z)ds)$$

Donc,

$$\partial_\tau[d^{n+1}(\tau,X(\tau,t,x),z)\exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)]$$
$$= [G^N(d^n)]\exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)$$

Soit, en intégrant l'égalité ci-dessus entre 0 et t, on obtient:

$$d^{n+1}(t,x,z)\exp(\int_0^t \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)$$
$$= d^0(X(0,t,x),z) + \int_0^t exp(\int_0^s \nu^N(d^n)(\sigma,X(\sigma,t,x))d\sigma))G^N(d^n(s,X(s,t,x),z)ds$$

Donc,

$$d^{n+1}(t,x,z) = d^0(X(0,t,x),z)\exp(-\int_0^t \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds) \quad (22)$$
$$+ \int_0^t \exp(-\int_s^t \nu^N(d^n)(\sigma,X(\sigma,t,x),z)d\sigma))G^N(d^n(s,X(s,t,x),z)ds$$

d^n étant continue car elle apartient à E, alors: d^{n+1} est continue.
Or, comme $G^N(d^n)(s,X(s,t,x),z) \geq 0$,alors:

$$d^{n+1}(t,x,z) \geq d^0(X(0,t,x),z)\exp(-\int_0^t \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z))ds$$

Donc, $d^{n+1}(t,x,z) \geq 0$.
Ce qui démontre la première partie du lemme.

2 D'autre part, d'après (22), $d^{n+1}(t,x,z) \leq d^0(X(0,t,x),z)+\int_0^t G^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds$
Donc,

$$d^{n+1}(t,x,z) \leq R_0 + \int_0^t \int_0^z a^N(z-y,y)d^n(s,X(s,t,x),y)d^n(s,X(s,t,x),z-y)dyds$$
$$+ \int_0^t \int_0^{N-z} b^N(z,y)d^n(s,X(s,t,x),y+z)dyds.$$

Or, comme $d^n \in E$, alors $(d^n)(s,X(s,t,x),z) \leq Y_N(t)$. Donc,

$$d^{n+1}(t,x,z) \leq R_0 + \int_0^t (AY^2(s)+BY(s))ds$$

D'où en utilisant le fait que Y_N est solution du probl'eme de Cauchy (**??**), alors:

$$d^{n+1}(t,x,z) \leq R_0 + \int_0^t \frac{dY}{ds}ds$$

Finalement

$$d^{n+1}(t,x,z) \leq Y(t)$$

E est alors stable par l'application Γ définissant l'itération.
Ce qui démontre le lemme.

□

On munit alors E de la norme suivante:

$$|||C||| = \sup_{s\in[0;T]} |e^{\omega_N s}\|c(s,,)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)\times L^\infty([0;N])}|$$

E muni de cette norme est alors un espace complet. Cherchons alors ω_N tel que Γ soit contractante sur E.

Lemme 12. *Il existe une constante ω_N ne dépendant que de N telle que l'application Γ soit contractante de E dans E pour la norme $|||\quad|||$.*

Preuve du lemme

Nous allons raisonner comme pour la preuve du lemme 4.
On considère deux termes consécutifs l'itération (22):

$$\partial_t d^{n+1}(t,x,z) + u(t,x).\nabla_x(d^{n+1})(t,x,z) = [G^N(d^n) - \nu^N(d^n)d^{n+1}](t,x,z)$$

$$\partial_t d^n(t,x,z) + u(t,x).\nabla_x(d^n)(t,x,z) = [G^N(d^{n-1}) - \nu^N(d^{n-1})d^n](t,x,z)$$

En soustrayant les deux premières égalités, on obtient:

$$\begin{aligned} &\partial_t[d^{n+1}-d^n](t,x,z) + u(t,x).\nabla_X(d^{n+1}-d^n)(t,x,z) \\ &= [G^N(d^{n)}) - G^N(d^{n-1})](t,x,z) + \nu^N(d^{n-1})(t,x,z)d^n(t,x,z) \\ &\qquad -\nu^N(d^n)(t,x,z)d^{n+1}(t,x,z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\partial_t[d^{n+1}-d^n](t,x,z) + u(t,x).\nabla_x(d^{n+1}-d^n)(t,x,z) + \nu^N(d^n)(t,x,z)(d^{n+1}-d^n)(t,x,z) \quad (23) \\ &= [G^N(d^n) - G^N(d^{n-1})](t,x,z) + d^n(t,x,z)(\nu^N[d^{n-1})(t,x,z) - \nu^N(d^n)(t,x,z)] \end{aligned}$$

Or, on a:

$$\begin{aligned} &\partial_\tau[(d^{n+1}-d^n)(\tau,X(\tau,t,x),z)\exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds) \\ &= [\partial_t(d^{n+1}-d^n)(\tau,X(\tau,t,x),z) + u(\tau,X(\tau,t,x),z)\cdot\nabla_x(d^{n+1}-d^n)(\tau,X(\tau,t,x),z) \\ &+(d^{n+1}-d^n)(\tau,X(\tau,t,x),z)\nu^N(d^n)(\tau,X(\tau,t,x),z)]\exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds) \end{aligned}$$

D'où, en revenant à l'égalité (23) ci-dessus, on a:

$$\partial_\tau[(d^{n+1}-d^n)(\tau,X(\tau,t,x),z)\exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)$$
$$=([G^N(d^n)-G^N(d^{n-1}))](\tau,X(\tau,t,x),z)$$
$$+d^n(\tau,X(\tau,t,x),z)[\nu^N(d^{n-1}-\nu^N(d^n)](\tau,X(\tau,t,x),z))\exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)$$

On intègre alors l'égalité précédente entre 0 et t, on obtient:

$$|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)\exp(\int_0^t \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)|$$
$$\leq \int_0^t [([G^N(d^n)-G^N(d^{n-1}))](\tau,X(\tau,t,x),z)$$
$$+d^n(\tau,X(\tau,t,x),z)|[\nu^N(d^{n-1}-\nu^N(d^n)](\tau,X(\tau,t,x),z))|\exp(\int_0^\tau \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)]d\tau$$

Soit,

$$|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)| \leq \int_0^t [([G^N(d^n)-G^N(d^{n-1}))](\tau,X(\tau,t,x),z)$$
$$+d^n(\tau,X(\tau,t,x),z)[\nu^N(d^{n-1})-\nu^N(d^n)](\tau,X(\tau,t,x),z))\exp(-\int_\tau^t \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds)]d\tau$$

Par ailleurs, comme $\exp(-\int_\tau^t \nu^N(d^n)(s,X(s,t,x),z)ds) \leq 1$, alors on a:

$$\begin{aligned}|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)| \quad &\leq \int_0^t[([G^N(d^n)-G^N(d^{n-1}))](\tau,X(\tau,t,x),z)\\ &+d^n(\tau,X(\tau,t,x),z)[\nu^N(d^{n-1})-\nu^N(d^n)](\tau,X(\tau,t,x),z))d\tau\end{aligned}$$

D'où, G^N et P^N étant localement lipschitziennes, on obtient:

$$|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)| \leq C(N,T)\int_0^t |[d^n-d^{n-1}]|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}(s,z)ds$$

En considérant maintenant le sup sur la variable de taille dans le second membre de l'inégalité, on obtient:

$$|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)| \leq C(N,T)\int_0^t |[d^n-d^{n-1}]|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)\times L^\infty(\mathbb{R}_+)}(s)ds$$

En multipliant le second membre de l'inégalité par $e^{-\omega_N t}$, on ontient:

$$e^{-\omega_N t}|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)| \leq C(N,T)e^{-\omega_N t}\int_0^t e^{\omega_N s}e^{-\omega_N s}\|d^n-d^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)\times L^\infty(\mathbb{R}_+)}(s)ds$$

Soit, par passage au sup sur [0;T], on obtient:

$$e^{-\omega_N t}|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)| \leq C(N,T)e^{-\omega_N t}|||d^n-d^{n-1}|||\int_0^t e^{\omega_N s}ds$$

C'est à dire,

$$e^{-\omega_N t}|d^{n+1}-d^n| \leq C(N,T)e^{-\omega_N t}|||d^n-d^{n-1}|||\frac{e^{\omega_N s}-1}{\omega_N}$$

Soit,

$$e^{-\omega_N t}|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)| \leq C(N,T)\frac{1-e^{-\omega_N}}{\omega_N}|||d^{n+1}-d^n|||$$

Ainsi,

$$e^{-\omega_N t}|(d^{n+1}-d^n)(t,x,z)| \leq C(N,T)\frac{2}{\omega_N}|||d^{n+1}-d^n|||$$

On considère alors le sup sur les variables de temps, de taille et d'espace et on obtient:

$$|||d^{n+1}-d^n||| \leq \frac{2}{\omega_N}C(N,T)|||d^{n+1}-d^n|||$$

On choisit alors N suffisament grand, de telle sorte que $\frac{2}{\omega_N}C(N,T) < 1$

On obtient ainsi, en posant $k = \frac{2}{\omega_N}C(N,T)$

$|||d^{n+1}-d^n||| < k|||d^{n+1}-d^n|||$ avec $k < 1$.

Ce qui démontre le lemme 8.

$\square$

Preuve de la proposition 3.

La suite d^n est donc de Cauchy dans E, complet. Donc, elle converge.
On obtient donc l'existence d'une solution pour le problème non linéaire tronqué sur $[0;T]\times\mathbb{R}^D$.
De plus, Γ étant contractante, on obtient l'unicité de la solution. Ce qui montre la proposition.

$\square$.

2.2.3 Solution du problème

Notre but est maintenant, de passer à la limite dans l'équation (20) vérifiée par la solution du problème tronqué: Soit $R > 0$.
On a: $(\forall(t,x,z) \in [0,T] \times \bar{B_R} \times \mathbb{R}_+)(\forall N \in \mathbb{N}) c^N(t,x,z) \leq \|Y\|_{L^\infty([0;T])}$
Il existe donc une borne dans $L^\infty((0;T)\times\bar{B_R})$ sur la solution c^N, indépendante de N.
On a, en dérivant G par rapport à la variable d'espace:

$$\begin{aligned}\partial_x[G^N](t,x,z) &= \int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,y,z)\partial_x[c^N(t,x,z-y)]dy \\ &+ \int_0^{N-z} b^N(z,y)\partial_x[c^N(t,x,z+y)]dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,y,z)\partial_x[c^N(t,x,z-y)]dy \\ \leq &\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)dy \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_x[c^N(t,x,z)]|\end{aligned}$$

Il suffit de montrer alors que $\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)dy$ est bornée indépendemment de N et de z. Soit $K > 0$
D'après l'hypothèse $H4$du théorème 2, on a qu'il existe une constante M_0 telle que: $a^N(z-y,y) \leq (1+y)^\alpha$.
Soit,

$$\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)dy \leq \int_0^z M_0(1+y)^\alpha c^N(t,x,y)dy$$

$$\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)dy \leq \int_0^K M_0(1+y)^\alpha c^N(t,x,y)dy + \int_K^\infty M_0\frac{(1+y)^\alpha}{y} yc^N(t,x,y)dy$$

Soit par décroissance de $\frac{(1+y)^\alpha}{y}$,

$$\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)dy \leq \int_0^K M_0(1+y)^\alpha c^N(t,x,y)dy + M_0\frac{(1+K)^\alpha}{K}\int_K^\infty yc^N(t,x,y)dy$$

Donc comme $c^N(t,x,y) \leq \|Y\|$.

$$\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)dy \leq \int_0^K M_0(1+y)^\alpha \|Y\| dy + M_0\frac{(1+K)^\alpha}{K}\int_K^\infty yc^N(t,x,y)dy$$

En définitive il existe une une constante M_5 indépendante de t, x, N telle que

$$\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,y,z)\partial_x[c^N(t,x,z-y)]dy \leq M_5 \sup_{z\in]0;+\infty[} \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_x[c^N(t,x,z-y)]$$

Par un raisonnement analogue, il existe aussi une constante B vérifiant:

$$\int_0^{N-z} b^N(z,y)\partial_x[c^N(t,x,z+y)]dy \leq B| \sup_{z\in]0;+\infty[} sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_x[c^N(t,x,z)]|$$

D'où, finalement, il existe une constante C indépendante de t, x, z et N vérifiant:

$$(\forall N \in \mathbb{N}), \partial_x[G^N](t,x,z)| \leq C \sup_{z\in]0;+\infty[} \sup_{x\in\mathbb{R}^D} |\partial_x[c^N(t,x,z)]|$$

De même,il existe une constante D indépendante de t, x, z et N vérifiant :

$$|\partial_x[P^N(c^N)](t,x,z)| \leq D \sup_{z\in]0;+\infty[} \|\partial_x c^N(t,x,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}$$

En définitive, il existe une constante positive E indépendante de t, x, z et N, vérifiant:

$$(\forall N \in \mathbb{N}), (\forall (t,x,z) \in [0;T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}_+), \tag{24}$$

$$|\partial_x[Q^N(c^N)](t,x,z)| \leq E \sup_{z\in]0;+\infty[} \|\partial_x c^N(t,x,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \tag{25}$$

D'autre part, en résolvant comme dans la partie (1) sur la caractéristique définie par l'équation (5), on a:

$$c^N(t,x,z) = c^0(X(0,t,x),z) + \int_0^t [Q^N(c^N)](s,X(s,t,x),z)ds$$

$Q^N(c^N)$ étant continue et c_i^0 étant C^1, c^N est alors C^1.
D'où, en dérivant par rapport à la variable d'espace:

$$\partial_x c_i^N(t,x,z) \leq \partial_X c^0(X(0,t,x),z)\partial_x X(0,t,x) + \int_0^t \partial_X[Q^N(c^N)](s,X(s,t,x),z)\partial_x X(s,t,x)ds$$

Par application du lemme 6, $\partial_t X(0,t,x)$ et $\partial_x X(s,t,x)$ sont bornées. De plus, d'après l'hypothèse (1) du théorème 2, $\partial_x c^0$ esr bornée sur $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}_+$.

donc, il existe deux constantes positives C et α indépendantes de t, x, z et N telles que:

$$sup_{x\in\mathbb{R}^D}\|\partial_x[c^N(t,x,z)]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leq C + \alpha\int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}^D}\|\partial_x[c^N(s,x,z)]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}ds$$

Donc, d'après le lemme de Gronwall,

$$(\forall t\in[0;T]),\ \sup_{z\in]0;+\infty[}\|\partial_x c^N(t,x,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leq C\exp(\int_0^t \alpha ds)$$

$$(\forall t\in[0;T]),\ \sup_{z\in]0;+\infty[}\|\partial_x c^N(t,x,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leq Ce^{\alpha t}$$

Soit,

$$\sup_{z\in]0;+\infty[}\|\partial_x c(t,x,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} \leq C\exp(\alpha T)$$

Dérivons maintenant par rapport au temps:

$$\begin{aligned}\partial_t c(t,x,z) &= \partial_X c^0(X(0,t,x),z)\partial_t X(0,t,x) + \partial_X Q^N(c^N)(s,X(s,t,x),z)\partial_t X(t,t,x)\\ &+ \int_0^t \partial_X Q^N(c^N)(s,X(s,t,x),z)\partial_t X(s,t,x)ds\end{aligned}$$

D'où, d'après l'inégalité(24):

$$\begin{aligned}|\partial_t c(t,x,z)| &\leq |\partial_X c^0(X(0,t,x),z)\partial_t X(0,t,x)|\\ &+ E\sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_X Q^N(c^N)(s,X(s,t,x),z)\partial_t X(t,t,x)|\\ &+ E\int_0^t \sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_X c^N(s,x,z)|ds\end{aligned}$$

D'après le lemme 6, $\partial_t X(0,t,x)$ et $\partial_t X(t,t,x)$ sont bornées indépendemment de x et t. De plus, d'après les hypothèses du théorème (2), $\partial_x c^0$ est bornée sur $\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}_+$.

Donc, il existe 3 constantes positives C,D et C' indépendantes de t, x, z et de N telles que:

$$|\partial_t c^N(t,x,z)| \leq C + D'\sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_X(c^N)(t,x,z)| + C'\int_0^t \sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{x\in\mathbb{R}^D}||\partial_x c^N(s,x,z)|ds$$

D'où, en utilisant le fait que $\sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{x\in t^D}|\partial_x(c^N)(t,x,z)|$ est bornée sur $\mathbb{R}^D$, on obtient que, la suite $|\partial_t c^N(t,x,z)|$ est bornée sur $[0;T]\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}_+$. En particulier, $|\partial_t c^N(t,x,z)|$ est bornée sur $[0;T]\times\bar{B_R}\times[0;M]$ pour tout $R>0$ et tout $M>0$.
Dérivons, maintenant par rapport à la variable de taille:

$$\partial_z c^N(t,x,z)=\int_0^t \partial_z(Q^N(c^N))(s,X(s,t,x),z)ds+\partial_z c^0(X(0,t,x),z)$$

$$\begin{aligned}\partial_z(G^N)(c^N)(t,x,z)&=a^N(0,z)c^N(t,x,z)c^N(t,x,0)\\&+\int_0^z \partial_z a^N(z-y,y)c^N(t,x,z)c^N(t,x,z-y)dy\\&+\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)\partial_z c^N(t,x,z-y)dy\end{aligned}$$

$\partial_z c^0$ est bornée d'après l'hypothèse 1 du théorème (2). En raisonnant comme précédemment
La suite $c^N(t,x,z)$ étant bornée dans $L^\infty([0;T]\times\mathbb{R}^D\times[0;+\infty[)$, on obtient que $\partial_z(G^N)(c^N)(t,x,z)$ vérifie:

$$|\partial_z(G^N)(c^N(t,x,z))|\leq M'+M\sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_z c^N(t,x,z)|$$

où M' et M sont deux constantes positives indépendantes de $t,x,,z$ et N.
Par un raisonnement analogue avec P^N, on obtient une inégalité du même type.
Donc, il existe deux constantes positives $\tilde{M'}$ et $\tilde{M}$ indépendantes de t,x,z et N vérifiant:

$$(\forall(t,x,z)\in([0;T]\times\mathbb{R}^D\times[0;+\infty[)|\partial_z(Q^N)(c^N)|\leq\tilde{M'}+\tilde{M}sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_z c^N(t,x,z)|$$

Donc, $\partial_z c^N(t,x,z)$ vérifie l'inégalité:

$$sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_z c^N(t,x,z)|\leq M'T+M\int_0^t sup_{z\in\mathbb{R}_+}sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_z c^N(t,x,z)|dt$$

Donc, d'après le lemme de Gronwall, on obtient:

$$sup_{z\in\mathbb{R}_+}sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_z c^N(t,x,z)|\leq M'T[\exp(MT)-1]$$

Soit,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}_+} sup_{x\in\mathbb{R}^D}|\partial_z c^N(t,x,z)| \leq M'T\exp(MT)$$

Par conséquent, la suite $(c^N(t,x,z))_{n\in\mathbb{N}}$, est équicontinue sur $[0;T]\times\bar{B_R}\times[0;M]$ pour tout $R>0$ et tout $M>0$.
Elle est donc compacte dans $C^0([0;T]\times\bar{B_R}\times[0;B])$, pour tout $B>0$ et tout $R>0$.
Ce qui montre la proposition.
$\square$.

On peut donc extraire de $(c^N(t,x,z))_{N\in\mathbb{N}}$ une sous suite qui converge uniformément sur tout compact de la forme $[0;T]\times\bar{B_R}\times[0;B]$.
Remarquons au passage, que pour le cas discret, nous n'avions pas eu besoin de propriété de compacité en taille pour la solution du problème tronqué. En effet, celle ci nous permet dans le cas présent d'obtenir une extraction sur la suite $(c^N(t,x,z))_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit indépendante de la variable de taille z. Or, dans le cas discret, cette difficulté a été résolue par un procédé diagonal sur la variable de taille.

Preuve du théorème 2

On cherche alors à passer à la limite dans l'équation (20) au sens des distributions:
Soit φ une fonction test qui $\in C_c^\infty([0;T[\times\mathbb{R}^D)$.
Soit $R>0$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi)\subset[0;T[\times\mathbb{R}^D$.
On multiplie maintenant l'équation (20) par φ et on intègre en temps et en espace. On obtient alors:

$$(\forall\varphi\in C_c^\infty([0;T[\times\mathbb{R}^D), \tag{26}$$

$$\int_0^T\int_{\bar{B_R}}(\partial_t c^N)(t,x,z)\varphi(t,x)dxdt+ \quad \int_0^T\int_{\bar{B_R}} u(t,x)\cdot\nabla_x(c^N)(t,x,z)dxdt \tag{27}$$

$$= \int_0^T\int_{\bar{B_R}} Q^N(c^N)(t,x,z)\varphi(t,x)dxdt \tag{28}$$

Or, par intégration par parties, on a:

$$\int_0^T\int_{\bar{B_R}}\partial_t c^N(t,x,z)\varphi(t,x)dxdt = -\int_0^T\int_{\bar{B_R}} c^N(t,x,z)\partial_t\varphi(t,x)dxdt+\int_{\bar{B_R}} c_0^N(x,z)\varphi(0;x)dx$$

Or, par convergence dominée, on a:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^T\int_{\bar{B_R}}\partial_t c^N(t,x,z)\varphi(t,x)dxdt=\int_0^T\int_{\bar{B_R}}\partial_t c(t,x,z)\varphi(t,x)dxdt$$

Et également,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{\bar{B_R}}c_0^N(x,z)\varphi(0;x)dx=\int_{\bar{B_R}}c_0(x,z)\varphi(0;x)dx$$

D'autre part,

$$\int_0^T\int_{\bar{B_R}}u(t,x)\cdot\nabla_x(c^N(t,x,z))\varphi(t,x)dxdt=\sum_{j=1}^D\int_0^T\int_{\bar{B_R}}u(t,x)\cdot\partial_{x_j}(c^N(t,x,z))\varphi(t,x)dxdt$$

Or, la formule de Green, donne:

$$\int_0^T\int_{\bar{B_R}}u_j(t,x)\partial_{x_j}c^N(t,x,z)\varphi(t,x)dxdt=-\int_0^T\int_{\bar{B_R}}c^N(t,x)\partial_{x_j}(u_j\varphi)(t,x)dxdt$$

$$\int_0^T\int_{\bar{B_R}}u_j(t,x)\partial_{x_j}c^N(t,x,z)\varphi(t,x)dxdt=-\int_0^T\int_{\bar{B_R}}c^N(t,x)\partial_{x_j}u_j\varphi+\partial_{x_j}(\varphi)u_j(t,x)dxdt$$

Or, en sommant et en utilisant le fait que div(u)=0, on obtient:

$$\int_0^T\int_{\bar{B_R}}u(t,x)\cdot\nabla_x(c^N(t,x,z))\varphi(t,x)dxdt=-\sum_{j=1}^D\int_0^T\int_{\bar{B_R}}c^N(t,x,z)u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x)dxdt$$

Or par convergence dominée, on a:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^T\int_{\bar{B_R}}c^N(t,x,z)u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x)dxdt=\int_0^T\int_{\bar{B_R}}c(t,x,z)u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x)dxdt$$

Donc, $u(t,x)\cdot\nabla_x c^N$ converge vers $u\cdot\nabla_x c$ dans $D'([0,T]\times\mathbb{R}^D)$.
On cherche maintenant à montrer la convergence de: $\int_0^T\int_{\bar{B_R}}G^N(t,x,z)\varphi(t,x)dxdt$
On considère dans un premier temps la quantité suivante:

$$\int_0^T\int_{\bar{B_R}}\int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)c^N(t,x,z-y)dy\varphi(t,x)dxdt$$

Or, $|c^N(t,x,y)c^N(t,x,z-y)| \leq [Y(t)]^2$.De plus, Y étant continue sur [0;T], elle est bornée par une quantité M_0.
Egalement, $(\forall z \in \mathbb{R}_+), a^N(z-y,y) \leq a(z-y,y)$,
avec $y \mapsto a(z-y,y) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.
De plus, on a convergence simple de c^N vers c et de a^N vers a.
Donc, par convergence dominée, on a:

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^T \int_{\bar{B_R}} \int_0^z a^N(z-y,y)c^N(t,x,y)c^N(t,x,z-y)dy\varphi(t,x)dxdt$$
$$= \int_0^T \int_{\bar{B_R}} \int_0^z a(z-y,y)c(t,x,y)c(t,x,z-y)dy\varphi(t,x)dxdt$$

Etudions maintenant la convergence du terme

$$\int_0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)c^N(t,x,z)dy$$

Débutons par

$$\int_0^\infty a^N c^N(t,x,y)dy(c^N(t,x,z)-c(t,x,z))$$

Il nous suffit de borner le terme

$$\int 0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy$$

Or $a^N(y,z) \leq a^N(y,z) \leq M_1(1+z)(1+y)$ Alors,

$$\int 0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy \leq (1+z) \int 0^\infty (1+y)M_1 c^N(t,x,y)dy$$

Par conséquent,

$$\int 0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy \leq (1+z) \int 0^\infty \frac{(1+y)}{y} M_1 y c^N(t,x,y)dy$$

On coupe alors l'intégrale en deux. Soit $K > 0$.

$$\int 0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy = \int K^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy + \int 0^K a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy$$

On utilise alors la majoration effectué au dessus. Donc

$$\int K^{\infty} a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy \leq (1+z)\frac{K}{1+K}M_1 \int_K^{\infty} yc^N(t,x,y)dy$$

Soit,

$$\int K^{\infty} a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy \leq (1+z)\frac{K}{1+K}M_1 M_0$$

D'autre part

$$\int 0^K a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy \leq A_K \|Y\|_{\infty}$$

Par conséquent, $\int 0^{\infty} a^N(y,z)c^N(t,x,y)dy$ est bornée indépendemment de N.
Considérons maintenant $\int_0^{\infty} a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)$
Soit $K > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
&|\int_0^{\infty} a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)| \\
\leq &|\int_0^K a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)| \\
+&|\int_K^N a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)| \\
&\qquad\qquad + |\int_N^{\infty} a^N(y,z)c(t,x,y)|
\end{aligned}$$

Or,

$$|\int_0^K a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)| \leq \int_0^K a(y,z)|c(t,x,y) - c^N(t,x,y)|dy$$

De plus, comme $a^N(y,z) \leq M_1(1+y)^{\alpha}(1+z)^{\alpha}$, alors

$$|\int_K^N a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)| \leq (1+z)^{\alpha}|\int_K^N \frac{(1+y)^{\alpha}}{y} y|c(t,x,y) - c^N(t,x,y)|dy$$

Soit, par décroissance de $\frac{(1+y)^{\alpha}}{y}$, on a

$$|\int_K^N a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)| \leq (1+z)^{\alpha}|\int_K^N \frac{(1+K)^{\alpha}}{K} y|c(t,x,y) - c^N(t,x,y)|dy$$

D'où,

$$|\int_K^N a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)| \le (1+z)^\alpha \frac{(1+K)^\alpha}{K} \int_0^\infty |c(t,x,y)-c^N(t,x,y)|dy$$

Or, comme $\int_0^\infty |c(t,x,y) - c^N(t,x,y)|dy \le 2M_0$, alors finalement

$$|\int_K^N a^N(y,z)c(t,x,y) - \int_0^N a^N(y,z)c^N(t,x,y)| \le (1+z)^\alpha \frac{(1+K)^\alpha}{K} 2M_1M_0$$

De plus, $a^N(y,z)c(t,x,y) \le a(y,z)c(t,x,y)$ avec $a(y,z)c(t,x,y)$ intégrable. Alors par convergence dominée,

$$\lim_{N\to+\infty} |\int_N^\infty a^N(y,z)c(t,x,y)| = 0$$

En revenant à

$$|\int_0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)c^N(t,x,z)dy - \int_0^\infty a(y,z)c(t,x,y)c(t,x,z)dy|$$

, par passage à la limite supérieure, on obtient:

$$\limsup_{N\to+\infty} \| \int_0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)c^N(t,x,z)dy - \int_0^\infty a(y,z)c(t,x,y)c(t,x,z)dy\|_\infty \le (1+z)^\alpha \frac{(1+K}{K}$$

On fait alors tendre k vers $+\infty$ et on obtient: $\int_0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)c^N(t,x,z)dy$ converge vers $\int_0^\infty a(y,z)c(t,x,y)c(t,x,z)dy$ uniformément en variable de temps et d'espace. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \int_0^T \int_{\bar{B_R}} \int_0^\infty a^N(y,z)c^N(t,x,y)c^N(t,x,z)dy\varphi(t,x) \\ = \int_0^T \int_{\bar{B_R}} \int_0^\infty a(y,z)c(t,x,y)c(t,x,z)dy\varphi(t,x) \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on montre que $(\forall z \in \mathbb{R}_+)$, $P^N(c^N)(\cdot,\cdot;z)$ converge vers $P(c)(\cdot,\cdot;z)$ dans $D'([0,T]\times\mathbb{R}^D)$.
En conclusion, on a montré que l'équation (7) possédait une solution dans $D'([0,T]\times\mathbb{R}^D)$.
D'autre part, comme c^N converge uniformément vers c sur tout compact de $[0;T]\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}_+$, alors c est continue sur $[0;T]\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}_+$. Ce qui démontre

le théorème 2.
□

On remarque au passage, qu'on a uniquement existence locale en temps uniquement et non globale contrairement au cas discret. En effet, la globalisation en temps de la solution s'effectue grâce á la majoration suivante: $(\forall i \in \mathbb{N})(\forall t \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in \mathbb{R}^D), c_i(t,x) \leq \rho(t,x)$ et par application du théorème d'explosion. Or, cette majoration n'est plus valable dans le cas continu.

3 Le cas avec transport et diffusion

3.1 Position du problème

On s'intéresse maintenant à l'équation suivante dans laquelle $Q(c)_i$ a été définie au 1.1.
Ω désignera un ouvert borné dont le bord Γ est de classe C^1.

$$\begin{aligned} \partial_t(c_i)(t,x) - \nabla_x(u \cdot c_i(t,x)) - \Delta(c)(t,x) &= Q(c)_i(t,x) \\ c_i(0;x) = c_i^0(x) \qquad i \in \mathbb{N}, \qquad & x \in \Omega \\ \frac{\partial c_i}{\partial \eta}(t,\sigma) = 0 \quad t > 0, \quad & x \in \Gamma \end{aligned} \tag{29}$$

Où $Q(c)_i$ est définie dans l'équation (2).
Et où ∂_η représente la dérivée normale par rapport à Γ.

Dans cette partie l'essentiel de notre travail va consister à démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Supposons que les hypothèse suivantes soient vérifiées:*
$(H1) c_i^0 \geq 0$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \Omega$. *et* $c_i^0 \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$.
$(H2) \Omega$ *est un ouvert borné de classe* C^1.
$(H3) \rho^0 = \sum_{i=1}^{+\infty} i c_i^0 \in L^\infty(\Omega)$.
$(H4) u \in H^1(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$.
$(H5)\ \forall i,k > 1\ a_{k,i} = a_{i,k} > 0\ b_{k,i} = b_{i,k} > 0$
A i fixé $i \in \{1...\infty\}$ $a_{i,k} = o(k)$ *et* $b_{i,k} = o(k)$
De plus $sup_{i,k} \frac{a_{i,k}}{k} < \infty$ *et* $sup_{i,k} \frac{b_{i,k}}{k} < \infty$.
Alors le système (29) possède une solution sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D$ *au sens des distributions.*

Comme dans la partie précédente, nous allons raisonner en deux étapes: Nous allons dans un premier temps considérer un problème tronqué en taille , puis dans un second temps, nous allons passer à la limite.

3.2 Résolution du problème tronqué

Soit$N \in \mathbb{N}$. On va à nouveau négliger les tailles strictement supérieures à N, en considérant le problème suivant:

$$\partial_t(c_i^N)(t,x) - \nabla_x(uc_i^N)(t,x) - \Delta(c^N)(t,x) = Q(c^N)_i(t,x) \tag{30}$$

$$c_i^N(0;x) = c_i^{0,N}(x) \qquad i \in \mathbb{N}, \qquad t > 0, \qquad x \in \Omega \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial_\eta} c_i^N(t,\sigma) = 0 \qquad t > 0, \qquad \sigma \in \Gamma$$

On remarque que le problème est encore non linéaire. Dans cette approximation seule la difficulté due aux grandes tailles est supprimée.

Proposition 4. *Sous les hypothèse du théorème 3, le problème tronqué (31) possède une unique solution définie sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D$.

On considère maintenant l'itération suivante:

$$\partial_t d_i^{n+1}(t,x) - \Delta(d_i^{n+1})(t,x) + u(t,x)\cdot\nabla_x(d_i^{n+1})(t,x) + \nu_i^N(d_i^n)(t,x)d_i^{n+1}(t,x) = G_i^N(d^n)(t,x) \tag{32}$$

$$d_i^{n+1}(0;x) = c_i^0(x)$$

Soit S l'application définissant cette itération.

Lemme 13. *Si* $c \geq 0$*, alors,* $S(c) \geq 0$.

Preuve du lemme.
Montrons dans un premier temps que si $d_i^n \geq 0$, alors $d_i^{n+1} \geq 0$.
Pour cela nous allons appliquer la méthode des troncature de Stampacchia exposée dans [B]
Considérons une fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ vérifiant:
(1) f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
(2) f(t)=0 pour $\mathbb{R}_-$.

On suppose pour simplifier les notations que $c \geq 0$ et on pose $d = S(c)$. On a donc, l'égalité suivante:

$$\partial_t d(t,x) - \Delta(d)(t,x) + u(t,x)\cdot\nabla_x(d)(t,x) + \nu_i^N(c)(t,x)d(t,x) = G_i^N(c)(t,x)$$
$$d(0;x) = c(x)$$

On multiplie alors l'équation précédente par f(-d). On obtient ainsi:

$$(\partial_t d)f(-d) - \Delta(d)f(-d) + u\cdot\nabla_x(d)f(-d) + \nu_i^N(c)df(-d) = G_i^N(c)f(-d)$$

On intègre l'égalité précédente sur $[0;t]\times\Omega$. Alors:

$$(\forall t\in[0;T]),\quad (33)$$
$$\int_0^t\int_\Omega(\partial_t d)(t,x)f(-d)(t,x)dxdt - \int_0^t\int_\Omega\Delta(d)(t,x)f(-d)(t,x)dxdt \quad (34)$$
$$+\int_0^t\int_\Omega u(t,x)\cdot\nabla_x(d)(t,x)f(-d)(t,x)(t,x)dxdt + \int_0^t\int_\Omega\nu_i^N(c)(t,x)d(t,x)f(-d)(t,x) \quad (35)$$
$$= \int_0^t\int_\Omega G_i^N(c)(t,x)f(-d)(t,x)dxdt \quad (36)$$

Or, d'après la formule de Green et en utilisant le fait que $\dfrac{\partial d}{\partial\eta}(t,\sigma)=0$, pour $(t,\sigma)\in[0;T]\times\Gamma$.
On a:

$$-\int_0^t\int_\Omega\Delta(d)(t,x)f(-d)(t,x)dxdt = \int_0^t\int_\Omega\nabla_x(d)(t,x)\nabla_x[f(-d)(t,x)]dxdt$$

D'autre part,

$$\int_0^t\int_\Omega u\cdot\nabla_x(d)f(-d)dxdt = \int_0^t\int_\Omega\sum_{j=1}^d u_j(s,x)\partial_{x_j}d(s,x)f(-d)(s,x)dxds$$

Soit, F la primitive de f qui s'annule en 0. F vérifie alors les 2 propriétés suivantes:
F est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
F est identiquement nulle sur $]-\infty;0]$.
On obtient donc:

$$\int_0^t\int_\Omega u_j(s,x)\partial_{x_j}d(s,x)f(-d)(s,x)dxds = -\int_0^t\int_\Omega u_j(s,x)\partial_{x_j}F(-d)(s,x)dsdx$$

On applique alors la formule de Green:

$$\int_\Omega u_j(s,x)\partial_{x_j}d(s,x)f(-d)(s,x)dxds = -\int_\Gamma u_j(s,\sigma)F(-d)(s,\sigma)d\sigma + \int_\Omega\frac{\partial u_j}{\partial x_j}F(-d)(s,x)dx$$

Or, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $(\forall \sigma \in \Gamma), (\forall j \in \{1..D\}), u_j(s, \sigma) = 0$.
Par conséquent,

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} u_j(s,x)\partial_{x_j} d(s,x) f(-d)(s,x)dx = \int_\Omega div(u)(s,x)F(-d)(s,x)dx$$

Or, comme div(u)=0, alors:

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} u_j(s,x)\partial_{x_j} d(s,x) f(-d)(s,x)dx = 0$$

Par ailleurs,

$$-\int_0^t \int_\Omega (\partial_t d)(s,x) f(-d)(s,x)ds = \int_\Omega F(-d)(t,x)dx - \int_\Omega F(-d)(0,x)dx$$

On aboutit alors à l'inégalité:

$$l \int_\Omega F(-d)(t,x)dx - \int_\Omega F(-d)(0,x)dx + \int_0^t \int_\Omega f'(-d)|\nabla_x(d)|^2 dxdt \quad (37)$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega \nu_i^N(c)(s,x)(-d)(s,x)f(-d)(s,x)dxds \leq 0 \quad (38)$$

Or, comme $d(0;x) = c^0(x) \geq 0$, alors F étant nulle sur $]-\infty; 0]$, F(-d)(0;x)=0.
Or, $\nu_i^N(c) \geq 0$. De plus, K(x)=xf(x) est une quantité positive sur $\mathbb{R}$.
D'où, $(-d)f(-d) \geq 0$. Finalement, on obtient:

$$\int_0^t \int_\Omega \nu^N(-d)(s,x)f(-d)(s,x)dxds \leq 0.$$

f étant croissante $f'(-d) \geq 0$. En conclusion, $\int_\Omega F(-d)(t,x)dx \leq 0$.
Or, comme F est une foction positive, alors:

$$(\forall t \in [0;T]), \int_\Omega F(-d)(t,x)dx = 0$$

Par positivité de F(-d), on obtient que: F(-d) est nulle pp. F(-d) étant continue, elle est alors nulle sur $[0;T] \times \mathbb{R}^D$. D'où, finalement, par définition de F, $d \geq 0$ sur $[0;T] \times \Omega$.

Ce qui démontre le lemme.
□

Nous allons maintenant chercher une borne L^∞ sur la suite d_i^n.
Pour cela, nous allons démontrer que l'équation parabolique (32) définissant l'itération vérifie une propriété de principe du maximum à savoir:

Lemme 14. *Soit d=S(c); Alors, d_i satisfait à:*
$\|d_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|c_i^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t [A_N(\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)^N})^2 + B_N\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)^N}]ds$

Preuve

La preuve repose sur le principe du maximum et une méthode de Stampacchia [B]
Posons $f(t) = \int_0^t [A_N(\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)^N})^2 + B_N\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)^N}]ds$
On considère maintenant une fonction G vérifiant les 3 propriétés suivantes:
(1) $G \in C^1(\mathbb{R})$
(2) G est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
(3) $(\forall s \le 0), G(s) = 0$

Posons $K = \|c_i^0\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $H(s) = \int_0^s G(\sigma)d\sigma$.
On introduit alors la fontion φ telle que:
$\varphi(t) = \int_\Omega H(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx$.
φ vérifie les propriétés suivantes:
$\varphi \in C([0;+\infty[;\mathbb{R}), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi \in C^1(]0;+\infty[;\mathbb{R}) \quad \varphi \ge 0$.
Dérivons φ par rapport au temps:
$\varphi'(t) = \int_\Omega G[d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds](\partial_t d_i(t,x) - f(t))dx$.
Or, par définition de l'itération et par positivité du terme $\nu_i^N(d_i^n)d_i^{n+1}$, on a:

$$\partial_t d_i(t,x) - f(t) \le \Delta d_i(t,x) - \sum_{j=1}^{D} u_j(t,x)\partial_{x_j} d_i(t,x)$$

Donc, on obtient:

$$l\varphi'(t) \le \int_\Omega G(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)\Delta d_i(t,x)dx \qquad (39)$$

$$-\sum_{j=1}^{D}\int_\Omega u_j(t,x)\partial_{x_j} d_i(t,x) G(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx \qquad (40)$$

Or, par définition de H, on a:

$$\int_\Omega u_j(t,x)\partial_{x_j} H(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx \tag{41}$$
$$= -\int_\Omega u_j(t,x)\partial_{x_j} d_i(t,x) G(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx \tag{42}$$

La formule de Green nous donne alors,

$$\int_\Omega u_j(t,x)\partial_{x_j} H(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx \quad = \textstyle\int_\Gamma u_j(t,\sigma)H[d_i(t,\sigma) - K - \int_0^t f(s)ds]d\sigma \tag{43}$$
$$- \textstyle\int_\Omega \partial_{x_j} u_j(t,x)H[d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds]dx \tag{44}$$

Or, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u_j(t,\sigma) = 0$ pour $\sigma \in \Gamma$.
On obtient alors:

$$\sum_{j=1}^D \int_\Omega u_j(t,x)\partial_{x_j} H(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx \tag{45}$$
$$= -\int_\Omega div(u)(t,x) H(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx \tag{46}$$

Or, comme div(u)(t,x) =0 alors,

$$\sum_{j=1}^D \int_\Omega u_j(t,x)\partial_{x_j} H[d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds]dx = 0$$

De plus la formule de Green nous donne:

$$\int_\Omega G(d_i(t,x)-K-\int_0^t f(s)ds)\Delta d_i(t,x)dx = \int_\Omega |\nabla_x d_i(t,x)|^2 G''((d_i(t,x)-K-\int_0^t f(s)ds)dx$$

Donc, on obtient:

$$\varphi'(t) \leq -\int_\Omega |\nabla_x d_i(t,x)|^2 G''((d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx < 0$$

φ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc, comme $\varphi(0) = 0$, on a :
$(\forall t \in \mathbb{R}_+), \varphi(t) \leq 0$. Or, par positivté de φ, on obtient que: φ est nulle.
Et par suite, $(\forall t \in \mathbb{R}_+), \int_\Omega H(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds)dx = 0$.

D'où, H étant positive, $(\forall t \in \mathbb{R}_+), H(d_i(t,x) - K - \int_0^t f(s)ds) = 0$.
Donc, nécessairement par définition de H,on obtient que:

$$\|d_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|c_i^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t [A_N(\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)^N})^2 + B_N\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)^N}]ds$$

Ce qui prouve le lemme.
□

Nous allons maintenent employer une méthode analogue à celle de la partie 2. On considère le même problème de Cauchy dont Y_N est la solution. A savoir:

$$\begin{aligned} \frac{dY_N}{dt} &= A_N Y_N^2 + B_N Y_N \\ Y_N(0) &= R_0 \qquad t > 0 \end{aligned} \tag{47}$$

Soit, alors T_N le temps d'existence de Y_N.
On considère alors, $T \in [0; T_N]$.
On définit maintenant l'espace

$$E = \{c \in (L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d))^N; c \geqslant 0; \|c(t,.)\|_{[L^\infty(\mathbb{R}^d)]^N} \leqslant Y_N(t), t \in [0,T]\}$$

Proposition 5. *E est laissé stable par S.*

Preuve.
Nous allons utiliser les deux lemmes précédents.
Soit $c \in E$ et $d = S(c)$.
D'après le lemme, si $c \geq 0$, alors, $d \geq 0$
D'autre part, supposons maintenant que: $c(t,x) \leq Y_N(t)$
donc, d'après le principe du maximum appliqué à l'équation parabolique définissant l'itération, on a:

$$\|d_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|c_i^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t [A_N(\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)^N})^2 + B_N\|c(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)^N}]ds$$

Soit par définition de Y_N, on obtient:

$$\|d_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|c_i^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t [A_N(Y_N)^2 + B_N Y_N](s)ds$$

D'où,

$$\|d_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|c_i^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \frac{dY_N(t)}{dt}(s)ds$$

Donc, en choisissant $R_0 > \|c_i^0\|_{L^\infty(\Omega)}$, on obtient:

$$\|d_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Y_N(t)$$

On en conclut donc que E est stable par S.
□

On munit maintenant E de la norme suivante :

$$|||c||| = \sup_{s\in[0;T]} |\exp(-\omega_N s)\|c(s,\cdot)\|_{[L^2(\Omega)]^N}$$

La constante ω_N va être choisie comme dans la partie 2 afin de rendre l'application S contractante.

Lemme 15. *Il existe une constante ω_N ne dépendant que de N telle que l'application S soit contractante de E dans E pour la norme $|||\ \ |||$.*

Preuve

$$\partial_t d_i^{n+1}(t,x) - \Delta(d_i^{n+1})(t,x) + u\cdot\nabla_x(d_i^{n+1})(t,x) + \nu_i^N(d_i^n)d_i^{n+1}(t,x) = G_i^N(d_i^n)(t,x)$$

$$\partial_t d_i^n(t,x) - \Delta(d_i^n)(t,x) + u\cdot\nabla_x(d_i^n)(t,x) + \nu_i^N(d_i^{n-1})(t,x)d_i^n(t,x) = G_i^N(d_i^{n-1})(t,x)$$

On soustrait les 2 dernières équation, on obtient:

$$\begin{aligned}\partial_t(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x) &- \Delta(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x)\\ &+u\cdot\nabla_x(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x) + \nu_i^N(d_i^n)(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x)\\ &= [G_i^N(d_i^n) - G_i^N(d_i^{n-1})](t,x) + d_i^n(t,x)[\nu^N(d^{n-1}) - \nu^N(d^n))(t,x)]\end{aligned}$$

On multiplie la dernière équation par: $(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x)$ et on intègre sur $[0,T]\times\Omega$:

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega(d_i^{n+1} - d_i^n)\partial_t(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)dxds &- \int_0^t\int_\Omega(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)\Delta(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)dxds\\ &+ \int_0^t\int_\Omega(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)u(s,x)\cdot\nabla_x(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)dxds\\ &+ \int_0^t\int_\Omega \nu_i^N(d_i^n)(s,x)(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)dxds\\ &= \int_0^t\int_\Omega(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)[G_i^N(d_i^n) - G_i^N(d_i^{n-1})](s,x)dxds\\ &+ \int_0^t\int_\Omega d_i^n(s,x)(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)[\nu^N(d^{n-1}) - \nu^N(d^n))](s,x)dxds\end{aligned} \tag{48}$$

Or,

$$\int_0^t \int_\Omega (d_i^{n+1}-d_i^n)(s,x)\partial_t(d_i^{n+1}-d_i^n)(s,x)dxds = \int_\Omega (d_i^{n+1}-d_i^n)^2(t,x)dx - \int_\Omega (d_i^{n+1}-d_i^n)^2(0,x)dx$$

Or, comme $d_i^{n+1}(0,x) = d_i^n(0,x) = c_i^0(x)$, alors: $\int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)^2(0,x)dx = 0$.
En outre, la formule de Green nous donne:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)\Delta(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)dx = & -\int_\Gamma \frac{\partial(d_i^{n+1}-d_i^n)}{\partial\eta}(s,\sigma)d\sigma \\ & + \int_\Omega |\nabla_x[d_i^{n+1} - d_i^n](s,x)|^2dx \end{aligned}$$

D'autre part,

$$u(t,x)\cdot\nabla_x[d_i^n - d_i^{n+1}](t,x) = \sum_{k=1}^{D} u_k(t,x)\partial_{x_k}(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x)$$

D'où,

$$\int_\Omega u_k(t,x)(\partial_{x_k}[d_i^{n+1}-d_i^n](t,x)[d_i^{n+1}-d_i^n](t,x)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega u_k(t,x)\partial_{x_k}[(d_i^{n+1}-d_i^n)^2](t,x)dx$$

La formule de Green nous donne alors:

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_k(t,x)\partial_{x_k}[(d_i^{n+1} - d_i^n)^2](t,x)dx = & \ \frac{1}{2}\int_\Gamma u_k(\sigma,x)(d_i^{n+1} - d_i^n)(\sigma,x)d\sigma \\ & -\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_{x_k}u_k(t,x)(d_i^{n+1} - d_i^n)^2(t,x)dx \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse (4) du théorème (3), $u(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)$.
Donc, $(\forall\sigma \in \Gamma), u_k(t,\sigma) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega (u(t,x)\cdot\nabla_x(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x))(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x))dxdt \\ & \quad = -\int_0^t \int_\Omega div(u)(t,x)(d_i^{n+1} - d_i^n)^2(t,x)dxdt \end{aligned}$$

Or, u étant à divergence nulle, on obtient finalement:

$$\int_0^t \int_\Omega (u(t,x)\cdot\nabla_x(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x))(d_i^{n+1} - d_i^n)(t,x))dxdt = 0$$

L'égalité (16) devient donc:

$$\int_0^t \int_\Omega [\nabla_x (d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)]^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)^2(t,x)dx \quad (49)$$

$$= \int_0^t \int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)[G_i^N(d_i^n) - G_i^N(d_i^{n-1})](s,x)dxds \quad (50)$$

$$+\int_0^t \int_\Omega d_i^n(s,x)(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)[\nu^N(d^{n-1}) - \nu^N(d^n))](s,x)dxds \quad (51)$$

On obtient donc, l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)^2(t,x)dx \leq \int_0^t \int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)[G_i^N(d_i^n) - G_i^N(d_i^{n-1})](s,x)dxds \quad (52)$$

$$+\int_0^t \int_\Omega d_i^n(s,x)(d_i^{n+1} - d_i^n)(s,x)[\nu^N(d^{n-1}) - \nu^N(d^n))](s,x)dxds \quad (53)$$

D'autre part d'après le lemme 1, G_i^N et P_i^N sont localement lipschitziennes et $d_i^n(t,x) \leq Y_N(t)$ on obtient:

$$\int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)^2(t,x)dx \leq C(N,T)\int_0^t \int_\Omega \sup_{j\in\{1..N\}} [|d_j^n - d_j^{n-1}|](s,x)[d_i^n - d_i^{n-1}](s,x)dxds$$

L'inégalité d'Young appliquée au second membre nous donne:

$$\int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)^2(t,x)dx \leq \frac{C(N,T)}{2}\int_0^t \int_\Omega (\sup_{j\in\{1..N\}}[|d_j^n - d_j^{n-1}|](s,x))^2 \quad (54)$$

$$+\frac{C(N,T)}{2}\int_0^t \int_\Omega ([d_i^n - d_i^{n-1}](s,x))^2 dxds \quad (55)$$

Donc, d'après le lemme de Gronwall,

$$\int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)^2(t,x)dx \leq \frac{C(N,T)}{2}(\int_0^t \int_\Omega \sup_{j\in\{1..N\}} [|d_j^n - d_j^{n-1}|]^2(s,x))dsdx \exp(\frac{C(N,T)}{2})t)$$

On multiplie alors l'égalité précédente par $e^{-\omega_N t}$, on obtient:

$$e^{-\omega_N t}\int_\Omega (d_i^{n+1} - d_i^n)^2(t,x)dx \leq e^{-\omega_N t}\tilde{C}(N,T)\int_0^t \int_\Omega e^{\omega_N s}e^{-\omega_N s}\sup_{i\in 1..N}(d_i^{n+1} - d_i^n)^2(s,x)dxds$$

Ainsi, en prenant le sup sur la variable de temps sur [0;T] de la quantité: $e^{-\omega_N s}\int_\Omega \sup_{i\in 1..N}(d_i^{n+1} - d_i^n)^2(s,x)dx$, on obtient:

$$\leq e^{-\omega_N t}\tilde{C}(N,T)\int_0^t \int_\Omega e^{\omega_N s} ds sup_{s\in[0;T]}\int_\Omega sup_{i\in 1..N}(d_i^{n+1} - d_i^n)^2(s,x)dx \quad (56)$$

On intègre $e^{\omega_N s}$ entre 0 et t:

$$e^{-\omega_N t}\int_\Omega (d_i^{n+1}-d_i^n)^2(t,x)dx \leq e^{-\omega_N t}\tilde{C}(N,T)\frac{1-e^{\omega_N t}}{\omega_N}\sup_{s\in[0;T]} e^{-\omega_N s}\int_\Omega \sup_{i\in 1..N}(d_i^{n+1}-d_i^n)^2(s,x)dx$$

Ainsi, Le second membre étant indépendant de t, on considère le sup sur t $\in$ [0;T] du premier membre et on obtient:

$$e^{-\omega_N t}\int_\Omega (d_i^{n+1}-d_i^n)^2(t,x)dx \leq \tilde{C}(N,T)\frac{e^{-\omega_N t}-1}{\omega_N}\sup_{s\in[0;T]} e^{-\omega_N s}\int_\Omega \sup_{i\in 1..N}(d_i^{n+1}-d_i^n)^2(s,x)dx$$

Le second membre étant indépendant de t, on considère le sup sur t $\in$ [0;T] du premier membre et on obtient:

$$\sup_{t\in[0;T]} e^{-\omega_N t}\int_\Omega (d_i^{n+1}-d_i^n)^2(t,x)dx \leq \tilde{C}(N,T)\frac{2}{\omega_N}\sup_{s\in[0;T]} e^{-\omega_N s}\int_\Omega \sup_{i\in 1..N}(d_i^{n+1}-d_i^n)^2(s,x)dx$$

On pose $k = \dfrac{2\tilde{C}(N,T)}{\omega_N}$. On choisit alors ω_N de telle sorte que $k < 1$. Finalement, on obtient:

$$\sup_{t\in[0;T]} e^{-\omega_N t}\int_\Omega (d_i^{n+1}-d_i^n)^2(t,x)dx \leq k\sup_{s\in[0;T]} e^{-\omega_N s}\int_\Omega \sup_{i\in 1..N}(d_i^{n+1}-d_i^n)^2(s,x)dx$$

C'est à dire:

$$|||d_i^{n+1}-d_i^n||| \leq k|||d_i^n-d_i^{n-1}|||$$

L'application S est donc bien contractante pour la norme $|||\quad|||$.
Ce qui démontre le lemme.
$\square$

Preuve de la proposition 3

D'après le lemme précédent, la suite $(d_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy dans l'espace complet E. Elle converge donc dans E vers un point fixe de S qui est alors solution du problème tronqué. De plus, S étant contractante, on a alors unicité du problème tronqué non linéaire sur $[0;T]\times\Omega$.
Nous allons maintenant globaliser la solution du problème tronqué en temps. Pour cela, nous allons raisonner comme dans la partie 2 en utilisant la conservation de la masse totale des particules qui réagissent.

On considère alors les quantité:$\rho(t,x) = \sum_{i=1}^{+\infty} ic_i(t,x)$ et $\rho^N(t,x) = \sum_{i=1}^{N} ic_i^N(t,x)$
On multiplie alors dans le problème tronqué l'équation numéro i par i et on somme sur i jusqu'à N. En utilisant le lemme 5, on obtient que ρ^N vérifie:

$$\partial_t(\rho^N)(t,x) - \Delta(\rho^N)(t,x) + u(t,x)\cdot\nabla_x(\rho^N)(t,x) = 0 \tag{57}$$

$$\rho^N(0;x) = \rho_0^N(x) = \sum_{i=1}^{N} ic_i^0(x) \quad x \in \mathbb{R}^D \tag{58}$$

$$\frac{\partial\rho^N}{\partial\eta}(t,\sigma) = 0 \qquad t\in[0;T] \quad \sigma\in\Gamma$$

On utilise alors le principe du maximum démontré dans le lemme 11. On obtient alors:

$$\rho^N(t,x) \leq \|\rho_0^N\|_\infty \leq \|\rho_0\|_\infty \leq M_0 \tag{59}$$

On obtient alors par définition de c_i^N, $c_i^N(t,x) \leq \|\rho_0\|_\infty$
On choisit alors $R_0 = \|\rho_0\|_\infty$ et on résout léquation:

$$\partial_t(\tilde{c}_i^N)(t,x) - \nabla_x(u\tilde{c}_i^N)(t,x) - \Delta(\tilde{c}^N)(t,x) = Q(\tilde{c}^N)_i(t,x) \tag{60}$$

$$\tilde{c}_i^N(0;x) = c_i(T;x) \qquad i\in\mathbb{N}, \qquad t>0, \qquad x\in\Omega \tag{61}$$

$$\frac{\partial}{\partial_\eta}\tilde{c}_i^N(t,\sigma) = 0 \qquad t>0, \qquad \sigma\in\Gamma,$$

On effectue alors un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait. On obtient alors que l'on a existence et unicité de la solution du prblème tronqué sur [0;2T]. Ainsi en réitérant ce procédé on obtient l'existence et l'unicité du problème troqué sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^D$.
Ce qui achève la preuve de la proposition 3.
$\square$.

3.3 Solution du problème

Nous allons passer à la limite dans l'équation définissant le problème tronqué. Pour cela, nous allons devoir récupérer à nouveau de la compacité forte pour pouvoir passer à la limite dans les non-linéarités. A cette fin, montrons la propriété suivante:

Proposition 6. *A i fixé, la suite* $(c_i^N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est fortement compacte dans* $L^2([0;T];L^2(\Omega))$.

Dans un premier temps démontrons le lemme suivant :

Lemme 16. *A i fixé et pour tout* $T>0$, *alors* c_i^N *est bornée dans* $L^2([0;T];H^1(\Omega))$

Preuve

On considère le problème tronqué. On multiplie chaque équation par $c_i^N(t,x)$ et on obtient:

$$\partial_t(c_i^N)(t,x)c_i^N(t,x)-\nabla_x(uc_i^N)(t,x)c_i^N(t,x)-\Delta(c^N)(t,x)c_i^N(t,x)=Q_i^N(c^N)(t,x)c_i^N(t,x)$$

On intègre alors l'équation précédente sur $[0;T]\times\Omega$. Ce qui nous donne:

$$\int_\Omega\int_0^T\frac{d}{dt}(c_i^N)(t,x)dtdx+\int_\Omega\int_0^T\nabla_x(uc_i^N)(t,x)c_i^N(t,x) \quad (62)$$

$$-\int_\Omega\int_0^T\Delta(c^N)(t,x)c_i^N(t,x)dtdx=\int_\Omega\int_0^T Q^N(c_i^N)(t,x)c_i^N(t,x)dtdx \quad (63)$$

D'autre part, la formule de Green nous donne:

$$-\int_\Omega\Delta(c^N)(t,x)c_i^N(t,x)dtdx=\sum_{j=1}^D\int_\Gamma\partial_{x_j}(c^N)(t,\sigma)c_i^N(t,\sigma)dtdx \quad (64)$$

$$+\textstyle\int_\Omega|\nabla_x c_i^N|^2(t,x)dx \quad (65)$$

En outre,

$$\int_\Omega\int_0^T\sum_{j=1}^N u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N(t,x)c_i^N(t,x)dtdx=\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^T\sum_{j=1}^N u_j(t,x)\partial_{x_j}(c_i^N(t,x))^2dtdx$$

Par ailleurs la formule de Green nous donne:

$$\sum_{j=1}^N\int_\Omega u_j(t,x)\partial_{x_j}[(c_i^N)^2](t,x)dx=\sum_{j=1}^N\int_\Gamma(u_j(t,\sigma)[(c_i^N)(t,\sigma)]^2d\sigma \quad (66)$$

$$-\sum_{j=1}^N\int_\Omega(\partial_{x_j}u_j(t,x)[c_i^N(t,x)]^2dx \quad (67)$$

Or, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $(\forall \sigma \in \Gamma), (u_j(t,\sigma) = 0$.
On obtient donc,

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} (u_j(t,x)\partial_{x_j}[(c_i^N)^2](t,x)dx = \int_{\Omega} div(u)(t,x)[(c_i^N)^2](t,x)dx \qquad (68)$$

Or, comme div(u)=0, alors on obtient:

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} (u_j(t,x)\partial_{x_j}[(c_i^N)^2](t,x)dx = 0$$

L'équation (62) devient alors:

$$\int_{\Omega} [c_i^N(T,x)]^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_x c_i^N(t,x)|^2 dxdt \leq \int_{\Omega} (c_i^0(x))^2 dx + \int_{\Omega} \int_0^T c_i^N(t,x) Q_i^N(t,x) dtdx$$

D'autre part, en utilisant que: $c_i^N(t,x) \leq \|\rho_0\|_\infty \leq M_0$, alors

$$\int_{\Omega} \int_0^T |c_i^N(t,x) Q_i^N(c^N)(t,x)| dtdx \leq M_0 \int_{\Omega} \int_0^T |Q_i^N(c^N)(t,x)| dtdx$$

Reste donc à trouver une borne L^∞ sur $Q_i^N(c)$.
Pour cela, nous allons utiliser l'hypothèse 5 du théorème 3.

$$\sum_{k=1}^{i-1} b_{k,i} c_{i+k}^N \leq M_0 \sum_{k=1}^{i-1} b_{k,i}$$

Soit,

$$\sum_{k=1}^{i-1} b_{k,i} c_{i+k}^N \leq M_0 B$$

Où la quantité B a été définie dans l'hypothèse 5 du théorème (3). Ainsi en raisonnant de manière analogue à ce qui vient d'être fait sur les trois autres termes consittuant Q^N et en utilisant l'hypothèse (5) du théorème (3), on montre qu'il existe une constante M_1 indépendante de t, x, i et N, vérifiant: $Q_i^N(t,x) \leq M_1$
Donc, finalement, on obtient:

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_x c_i^N(t,x)|^2 dxdt \leq \int_{\Omega} (c_i^0(x))^2 dx + M_0 M_1 T mes(\Omega)$$

Donc, d'après l'hypothèse (1) du théorème (3), on a: $\int_\Omega (c_i^0(x))^2 dx$ est bornée
Donc, c_i^N est bornée dans $L^2([0;T],L^2(\Omega))$.
Ce qui démontre le lemme.
$\square$

Preuve de la proposition

La clef de la preuve va être le lemme d'Aubin.
Nous savons déjà d'après le lemme précédent que: c_i^N est bornée dans $L^2([0;T];H^1(\Omega))$
Reste alors à montrer que $\partial_t c_i^N$ est bornée dans $L^1([0;T];H^{-1}(\Omega))$.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.
On multiplie alors (31) par φ et on obtient:

$$\partial_t c_i^N(t,x)\varphi(t,x) = ([G_i^N - P_i^N](c^N)(t,x)\varphi(x) + \Delta(c_i^N)(t,x)\varphi(x) \quad (69)$$
$$-(u(t,x)\cdot\nabla_x(c_i^N)(t,x)\varphi(x) \quad (70)$$

On intègre alors la dernière égalité sur Ω et on obtient:

$$\int_\Omega \partial_t c_i^N(t,x)\varphi(x)dx = \int_\Omega([G_i^N - P_i^N](c^N)(t,x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \Delta(c_i^N)(t,x)\varphi(x)dx \quad (71)$$
$$-\int_\Omega u(t,x)\cdot\nabla_x(c_i^N)(t,x)\varphi(x)dx \quad (72)$$

Or, la formule de Green nous donne:

$$\int_\Omega \Delta(c_i^N)(t,x)\varphi(x)dx = \int_\Gamma \frac{\partial c_i^N}{\partial\eta}(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\eta \quad (73)$$
$$-\int_\Omega \nabla_x(c_i^N)(t,x)\nabla_x(\varphi)(x)dx \quad (74)$$

Or φ étant à support compact inclus dans Ω, φ est nulle sur Γ. On a donc:

$$\int_\Omega \Delta(c_i^N)(t,x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \nabla_x(c_i^N)(t,x)\nabla_x(\varphi)(x)dx$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a:

$$\int_\Omega \Delta(c_i^N)(t,x)\varphi(x)dx \leq (\int_\Omega |\nabla_x c_i^N(t,x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

Par aileurs, si l'on considère le terme de transport, on a d'après la formule de Green,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N t,x)\varphi(x)dx &= \sum_{j=1}^{D}\int_{\Gamma} c_i^N(t,\sigma)u_j(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma \qquad (75)\\ &- \sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} c_i^N(t,x)\partial_{x_j}(u_j(t,x)\varphi(x))dx \qquad (76)\end{aligned}$$

Or, comme $u(t,\cdot)\in H_0^1(\Omega)$ alors $(\forall\sigma\in\Gamma), u_j(t,\sigma)=0$.
D'autre part, $\partial_{x_j}(u_j(t,x)\varphi(x)) = \partial_{x_j}(u_j(t,x))\varphi(x) + \partial_{x_j}(\varphi(x))(u_j)(t,x)$
L'égalité précédente nous donne donc,

$$\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N t,x)\varphi(x)dx = -\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega}\partial_{x_j}(u_j(t,x))\varphi(x) + \partial_{x_j}(\varphi(x))(u_j)(t,x)dx$$

Soit,

$$\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N t,x)\varphi(x)dx = -\int_{\Omega} div(u)(t,x)\varphi(x)dx - \sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega}\partial_{x_j}(\varphi(x))(u_j)(t,x)dx$$

Or, div(u)(t,x)=0. Donc, on a:

$$\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N(t,x)\varphi(x)dx = -\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} c_i^N(t,x)\partial_{x_j}(\varphi(x))(u_j)(t,x)dx$$

Par ailleurs, en utilisant la borne L^∞ sur ρ_0, on obtient que:
$(\forall(t,x)\in[0;T]\times\mathbb{R}^D, c_i^N(t,x)\leq M_0$. Alors,

$$\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N(t,x)\varphi(x)dx \leq M_0\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(x)dx$$

Donc, en applicant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a:

$$\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N(t,x)\varphi(x)dx \leq M_0[\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega}(u_j(t,x))^2]dx]^{\frac{1}{2}}[\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega}[\partial_{x_j}\varphi(x)]^2dx]^{\frac{1}{2}}$$

Soit, en considérant la norme H^1 de φ.

$$\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega} u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N(t,x)\varphi(x)dx \leq M_0[\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega}(u_j(t,x))^2]dx]^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

D'autre part, dans la preuve du lemme précédent, on démontré que $[G_i^N - P_i^N](c^N)$ était bornée dans $L^\infty([0;T]\times\Omega)$. Donc, il existe une constante M_1 indépendante de t, x, i et N telle que: $[G_i^N - P_i^N](c^N) \leq M_1$.D'où,

$$|\int_{\Omega}[G_i^N - P_i^N](c^N)(t,x)\varphi(x)dx| \leq M_1\int_{\Omega}\varphi(x)dx$$

Soit, en applicant l'inégalité de Cauchy-Schwartz à l'intégrale du second membre, on a:

$$|\int_{\Omega}[G_i^N - P_i^N](c^N)(t,x)\varphi(x)dx| \leq M_1\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{mes(\Omega)}$$

Or, comme $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$,alors:

$$|\int_{\Omega}[G_i^N - P_i^N](c^N)(t,x)\varphi(x)dx| \leq M_1\sqrt{mes(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

Alors en revenant à la formule (71), on obtient:

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_{\Omega}\partial_t c_i^N(t,x)\varphi(x)dx| \leq \;& (\textstyle\int_{\Omega}|\nabla_x c_i^N t,x)|^2dx)^{\frac{1}{2}} + M_0[\displaystyle\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega}(u_j(t,x))^2dx)\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \\ & +M_1\sqrt{mes(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient:

$$\begin{aligned} (\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)), |\textstyle\int_{\Omega}\partial_t c_i^N(t,x)\varphi(x)dx| \;& \leq +M_1\sqrt{mes(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \\ & +M_0[\sum_{j=1}^{D}\int_{\Omega}(u_j(t,x))^2dx]^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \\ & +(\textstyle\int_{\Omega}|\nabla_x c_i^N|^2dx)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Soit en divisant chaque membre de la dernière inégalité par $\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$, on obtient :

$$| < \partial_t c_i^N(t,x); \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}} >_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} | \leq M_0\|u\|_{[L^2(\Omega)]^D} + (\int_{\Omega}|\nabla_x c_i^N|^2dx)^{\frac{1}{2}} + M_1\sqrt{mes(\Omega)}$$

On considère maintenant le sup sur φ du premier membre et on obtient:

$$\|\partial_t c_i^N(t,x)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq M_0\|u\|_{[L^2(\Omega)]^D} + (\int_\Omega |\nabla_x c_i^N|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + M_1\sqrt{mes(\Omega)}$$

On intègre maintenant la dernière inégalité sur [0;T] et on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\partial_t c_i^N(t,x)\|_{H^{-1}(\Omega)} dt &\leq M_0 \int_0^T \|u\|_{[L^2(\Omega)]^D} dt \\ &+ \int_0^T (\int_\Omega |\nabla_x c_i^N|^2 dx)^{\frac{1}{2}} dt + TM_1\sqrt{mes(\Omega)} \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a:

$$\int_0^T (\int_\Omega |\nabla_x c_i^N|^2 dx)^{\frac{1}{2}} dt \leq \sqrt{T}\|c_i^N\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$

Et,

$$\int_0^T \|u\|_{[L^2(\Omega)]^D} dt \leq \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\sqrt{T}$$

Or, c_i^N étant bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, on a qu'il existe une constante C indépendante de t, x et N telle que:

$$\int_0^T (\int_\Omega |\nabla_x c_i^N|^2 dx)^{\frac{1}{2}} dt \leq C$$

En définitive, il existe une constante D indépendante de t, x et N telle que:

$$\int_0^T \|\partial_t c_i^N(t,x)\|_{H^{-1}(\Omega)} dt \leq D$$

Par conséquent, $\partial_t c_i^N$ est bornée dans $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
Donc, d'après le lemme d'Aubin, c_i^N est fortement compacte dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
Ce qui démontre la proposition (6)
$\square$

Par conséquent, en employant un procédé diagonal comme dans le cas du modèle discret de la partie 2, on obtient qu'il existe une sous suite de $(c_i^N)_{N\in\mathbb{N}}$ (encore notée $(c_i^N)_{N\in\mathbb{N}}$) telle que: $(\forall i \in \mathbb{N}) c_i^N \rightarrow c_i$ dans $L^2([0;T] \times mathbb^D)$ fort.

Preuve du théorème 3

Il s'agit de passer à la limite dans l'équation (31).
Soit $\varphi \in C_c^\infty(mathbb_+ \times \Omega)$.
Soit $T >$ et $R > 0$ tels que $Supp\varphi \subset [0;T] \times \Omega$.
En multipliant l'équation (31) par φ et en intégrant sur $[0;T] \times \bar{B_R}$, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\bar{B_R}} \partial_t c_i^N(t,x)\varphi(t,x)dxdt = \ & \int_0^T \int_{\bar{B_R}} [G_i^N - P_i^N](c^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt \\ & + \int_0^T \int_{\bar{B_R}} \Delta(c_i^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt \\ & - \int_0^T \int_{\bar{B_R}} (u(t,x) \cdot \nabla_x(c_i^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt\end{aligned} \tag{77}$$

Or,

$$\int_0^T \int_{\bar{B_R}} \partial_t c_i^N(t,x)\varphi(t,x)dxdt = -\int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)\partial_t\varphi(t,x)dxdt$$

De plus, c_i^N convergeant en particulier faiblement vers c_i, on obtient que:

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)\partial_t\varphi(t,x)dxdt = \int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i(t,x)\partial_t\varphi(t,x)dxdt$$

D'autre part, en applicant deux fois la formule de Green, on a:

$$\int_0^T \int_{\bar{B_R}} \Delta(c_i^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt = \int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)\Delta(\varphi)(t,x)dxdt$$

De plus, c_i^N convergeant faiblement vers c_i, on obtient que:

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)\Delta(\varphi(t,x))dxdt = \int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i(t,x)\partial_t\Delta(\varphi(t,x))dxdt$$

Par ailleurs en considérant le terme de transport, on a:

$$\int_0^T \int_{\bar{B_R}} u(t,x)\cdot\nabla_x c_i^N(t,x)\varphi(t,x)dxdt = \sum_{j=1}^D \int_0^T \int_{\bar{B_R}} u_j(t,x)\partial_{x_j} c_i^N t,x)\varphi(t,x)dtdx$$

Donc, par application de la formule de Green, on a:

$$\int_0^T \int_{\bar{B_R}} u(t,x)\cdot\nabla_x c_i^N(t,x)\varphi(t,x)dxdt = -\sum_{j=1}^D \int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)\partial_{x_j}[u_j(t,x)\varphi(t,x)]dxdt$$

Ainsi,

$$\int_0^T \int_{\bar{B_R}} u(t,x)\cdot\nabla_x c_i^N(t,x)\varphi(t,x)dxdt \quad = -\int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)div(u)(t,x)\varphi[t,x)dxdt$$
$$+\sum_{j=1}^{D}\int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x)dxdt$$

Or, comme div(u)=0, alors

$$\int_0^T \int_{\bar{B_R}} u(t,x)\cdot\nabla_x c_i^N(t,x)\varphi(t,x)dxdt = \sum_{j=1}^{D}\int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x)dxdt$$

De plus, comme $u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x) \in L^2([0,T];L^2(\Omega))$, alors:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{D}\int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i^N(t,x)u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x)dxdt = \sum_{j=1}^{D}\int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i(t,x)u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x)dxdt$$

Par conséquent,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^T \int_{\bar{B_R}} u(t,x)\cdot\nabla_x c_i^N(t,x)\varphi(t,x)dxdt = \sum_{j=1}^{D}\int_0^T \int_{\bar{B_R}} c_i(t,x)u_j(t,x)\partial_{x_j}\varphi(t,x)dxdt$$

D'où, $u(t,x)\cdot\nabla_x c_i^N(t,x)$ converge vers $u(t,x)\cdot\nabla_x c_i(t,x)$ au sens des distributions.
Il s'agit maintenant de passer à la limite au sens des distributions dans le second membre de (31). D'après l'inégalité triangulaire,

$$|\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i}c_{i+k} - \sum_{k=1}^{N} b_{k,i}c_{i+k}^N]\varphi(t,x)dxdt| \quad \leq |\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=N}^{+\infty} b_{k,i}c_{i+k}\varphi(t,x)dxdt|$$
$$+|\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i}(c_{i+k}-c_{i+k}^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt|$$
$$+|\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=1}^{K}\varphi(t,x)b_{k,i}[c_{i+k}-c_{i+k}^N](t,x)dxdt|$$

Considérons alors le terme $|\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=1}^{K} \varphi(t,x) b_{k,i}[c_{i+k} - c_{i+k}^N](t,x)dxdt|$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a:

$$|\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=1}^{K} \varphi(t,x) b_{k,i}[c_{i+k} - c_{i+k}^N](t,x)dxdt| \tag{78}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{K} b_{k,i} \|\varphi\|_{L^2(0;T;L^2(\Omega))} \|c_{i+k} - c_{i+k}^N\|_{L^2(0;T;L^2(\Omega))}$$

Or, comme $c_{i+k}^N \to c_{i+k}$ fortement, alors, à $\varepsilon > 0$ fixé
$\exists N_k tq : (N > N_k) \Rightarrow \|c_{i+k} - c_{i+k}^N\|_{L^2(0;T;L^2(\Omega)} < \varepsilon$
D'où, en considérant, $N_0 = \max_{1;K} N_K$, on a:
$(N > N_0), \Rightarrow (\forall k \in \{1..K\}, \|c_{i+k} - c_{i+k}^N\|_{L^2(0;T;L^2(\Omega))} < \varepsilon$
Finalement, on obtient pour $N > N_0$,

$$\sum_{k=1}^{K} b_{k,i} \|\varphi\|_{L^2(0;T;L^2(\Omega))} \|c_{i+k} - c_{i+k}^N\|_{L^2(0;T;L^2(\Omega))} < \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i}$$

Soit, pour $N > N_0$, on a:

$$|\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=1}^{K} \varphi(t,x) b_{k,i}[c_{i+k} - c_{i+k}^N](t,x)dxdt| < \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i}$$

D'autre part en utilisant la borne L^∞ sur c_{i+k}^N, explicitée dans l'inégalité (14), on a: $(\forall k \in \{K..N\}, |[c_{i+k} - c_{i+k}^N](t,x)| \leq 2M_0$
D'où,

$$|\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i}(c_{i+k} - c_{i+k}^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt| \leq 2M_0 \|\varphi\|_\infty \sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i}$$

Evaluons maintenant le terme $|\int_0^T \int_{\bar{B_R}}[\sum_{k=N}^{+\infty} b_{k,i} c_{i+k} \varphi(t,x)dxdt|$

On cherche à permuter $\sum_{k=N}^{+\infty}$ et $\int_0^T \int_{\bar{B_R}}$.
Or, $|\int_0^T \int_{\bar{B_R}} b_{k,i} c_{i+k}(t,x)\varphi(t,x)dxdt| \leq M_0 \int_0^T \int_{\bar{B_R}} \varphi(t,x)dxdt b_{k,i}$

Soit, par convergence de la série de terme général, $b_{k,i}$, on peut alors permuter $\sum_{k=N}^{+\infty}$ et $\int_0^T \int_{\bar{B_R}}$.
D'où, on obtient,

$$|\int_0^T \int_{\bar{B_R}} [\sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i}(c_{i+k} - c_{i+k}^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt| \leq |\sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i} \int_0^T \int_{\bar{B_R}} (c_{i+k} - c_{i+k}^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt|$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité précédente, on obtient:

$$|\int_0^T \int_{\bar{B_R}} [\sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i}(c_{i+k} - c_{i+k}^N)(t,x)\varphi(t,x)dxdt| \leq R^D T M_0 \|\varphi\|_\infty \sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i}$$

Donc, en revenant à l'inégalité (78), on a:

$$|\int_0^T \int_{\bar{B_R}} [\sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i}c_{i+k} - \sum_{k=1}^{N} b_{k,i}c_{i+k}^N]\varphi(t,x)dxdt|$$
$$\leq R^D T M_0 \|\varphi\|_\infty \sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i} + \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i} + 2M_0 \|\varphi\|_\infty \sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i}$$

Soit par passage à la limite supérieure, on obtient:

$$\limsup_{N\to+\infty}[|\int_0^T \int_{\bar{B_R}} [\sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i}c_{i+k} - \sum_{k=1}^{N} b_{k,i}c_{i+k}^N]\varphi(t,x)dxdt|]$$
$$\leq D \sum_{k=K}^{k=N} b_{k,i} + \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i}$$

D'où, par convergence de la série de terme général $b_{k,i}$, on obtient en faisant tendre K vers $+\infty$, on obtient:

$$\limsup_{N\to+\infty}[|\int_0^T \int_{\bar{B_R}} [\sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i}c_{i+k} - \sum_{k=1}^{N} b_{k,i}c_{i+k}^N]\varphi(t,x)dxdt|] \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,i}$$

D'où le résultat. Pour la preuve nous allons raisonner comme pour la partie 1.

Démotrons alors que $\sum_{i=1}^{N} a_{k,i}c_k^N c_i^N$ converge vers $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i}c_k c_i$ dans $L^2([0;T] \times B_R)$.
Soit $K > 0$ fixé. Alors, comme $c_i^N \leq \frac{M_0}{i}$

$$|\sum_{i=K}^{N} a_{k,i}c_k^N c_i^N| \leq |\sum_{i=K}^{N} a_{k,i}c_k^N \frac{M_0}{i}|$$

D'où,

$$|\sum_{i=K}^{N} a_{k,i}c_k^N c_i^N| \leq \sum_{i=K}^{\infty} a_{k,i}c_k^N \frac{M_0}{i}|$$

Or, d'après l'hypothèse $(H5)$, $\sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_{i,k}}{i}$. Alors

$$|\sum_{i=K}^{N} a_{k,i}c_k^N c_i^N| \leq \sum_{i=K}^{\infty} M_0 \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_{k,i}}{i} \frac{k}{K} c_k^N|$$

Alors,

$$|\sum_{i=K}^{N} a_{k,i}c_k^N c_i^N| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_{k,i}}{i} M_0 \sum_{i=K}^{\infty} \frac{k}{K} c_k^N|$$

Donc,

$$|\sum_{i=K}^{N} a_{k,i}c_k^N c_i^N| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_{k,i}}{i} \frac{M_0^2}{K}$$

De même, on montre que

$$|\sum_{i=K}^{N} a_{k,i}c_k c_i| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_{k,i}}{i} \frac{M_0^2}{K}$$

Par ailleurs, par convergence dominée dans L^2, on a:

$$\sum_{i=1}^{K} a_{k,i}c_k^N c_i^N \to \sum_{i=1}^{K} a_{k,i}c_k c_i \quad \text{dans} \quad L^2$$

Par conséquent par passage à la limite supérieure:

$$\limsup_{N\to\infty} \| \sum_{i=1}^{N} a_{k,i}c_k^N c_i^N - \sum_{i=1}^{N} a_{k,i}c_k^N c_i^N \|_{L^2([0;T]\times \bar{B_R}} \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_{k,i}}{i} \frac{M_0^2}{K}$$

On fait alors tendre K vers ∞ et on obtient que $\sum_{i=1}^{N} a_{k,i} c_k^N c_i^N$ converge vers $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} c_k c_i$ dans $L^2([0;T] \times \bar{B_R}$
Ainsi par un raisonnement analogue on obtient le même résultat pour les autres temes.
Finalement, $P^N(c^N)$ converge vers $P(c)$ sur $mathbb_+ \times mathbb^D$ au sens des distributions.
Egalement, $G^N(c^N)$ converge vers $G(c)$ sur $mathbb_+ \times mathbb^D$ au sens des distributions.
Soit en passant à la limite dans l'équation (77), on obtient l'existence d'une solution de l'équation (29).
Ce qui achève la preuve du théorème 3.

4 Les temps grands

4.1 Position du problème

Nous allons étudier dans cette section le comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation (29). Cela va revenir à étudier le comportement des suites $c_i^n(t,x) = c_i(t + t_n, x)$, lorsque t_n tend vers $+\infty$.
Cette étude est faite de manière complète pour le cas de la diffusion dans [CP1].
Nous allons montrer que sous certaines hypothèse, vont converger vers des solutions stationnaires réalisant une certaine condition d'équilibre. Nous allons plus précisément montrer que les suites c_i^n convergent vers des solutions stationnaires qui annulent les vitesses de toutes les réaction. Si $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de telles solutions stationnaires, elle va réaliser:

$$(\forall i, j \geq 1), a_{i,k} m_i m_k = b_{i,k} m_{i+k}$$

On dit dans ce cas que ces solutions réalisent une condition d'équilibre en détail.
Ces solutions vont donc annuler le second membre de toutes les équations.
On remarque au passage que pour annuler le second membre, on aurait pu chercher les solutions qui annulent globalement toutes les sommes du second membre. On dit dans ce cas que les solutions stationnaires réalisent une condition d'équilibre. Les solutions qui réalisent une condition d'équlibre en détail ont l'avantage d'être les seules solutions stationnaires réalisant une condition d'équilibre à être stables.
Nous pouvons par ailleurs construire, en utilisant la relation (20), une famille de solutions stationnaires réalisant une condition d'équilibre en détail.
Une telle solution est donnée par:

$$\forall i \geq 1, m_i = Q_i (m_1)^i$$

où l'on a posé $Q_1 = 1, \qquad (\forall i > 1), Q_i = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{a_{k,1}}{b_{k,1}}$

En effet, si on est à équilibre en détail, alors c'est qu'on a annulé toutes les vitesses de toutes les réactions.
D'où, en particulier, d'après la relation (20) prise pour $k = 1$, on a:

$$(\forall i \geq 1), a_{i,1} m_i m_1 = b_{i,1} m_{i+1} \tag{79}$$

Ainsi,

$$(\forall i \geq 1), m_{i+1} = (\frac{a_{i,1}}{b_{i,1}} m_1) m_i$$

Soit,

$$(\forall i \geq 1), m_{i+1} = \prod_{k=1}^{i} (\frac{a_{i,1}}{b_{i,1}}) (m_1)^{i+1}$$

On remarque alors que cete quantité est paramétrée par m_1
On définit les quantités suivantes:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho^0(x) dx \qquad \rho^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} i m_i$$

Physiquement, $\bar{\rho}$, représente la concentration totale moyenne associé à la condition initiale.
Physiquement, ρ^{∞} représente la concentration moyenne totale de l'état d'équilibre.
On considère alors la série entière suivante: $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i z^i$.
Soit z_s son rayon de convergence.
On définit alors la quantité suivante: $\rho_s = \sum_{i=1}^{\infty} i Q_i z_s^i$ que l'on suppose finie.
C'est ce que l'on appelle la densité de saturation.

Pour plus de précisions sur ces qantités, cf [BCP]
Le but de cette section va être d'étudier le comportement des suites $c_i^n(t,x) = c_i(t+t_n, x)$, où $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une solution du système (29) et où t_n est une suite de $mathbb_+$ qui tend vers $+\infty$.
Nous allons montrer que cette suite converge vers une solution de (29) réalisant une condition d'équilibre en détail.
Le but de cette partie va alors être de démontrer le théorème suivant:

Théorème 4. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*
1) $(\forall (i,k) \in \mathbb{N}), a_{i,k} = a_{k,i} > 0, b_{k,i} = b_{i,k} > 0$
2) $sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}$ *et* $sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{+\infty} b_{i,k}$
3) $(\forall i \in \mathbb{N}) c_i^0 \geq 0; \rho^0 = \sum_{i=1}^{+\infty} i c_i^0 \in L^{\infty}(\Omega)$

4) $(\forall i \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^{+\infty} c_i^0 |ln(\frac{c_i^0(x)}{Q_i})| \in L^1(\Omega)$
Soit t_n une suite tendant $+\infty$. Alors, on peut en extraire une sous suite t_{n_k} de $mathbb_+$ vérifiant:
$(\forall x \in \Omega)(\forall \in mathbb_+) c_i(t_{n_k} + t, x) \to m_i$ *lorsque* $k \to +\infty$ *où* m_i *désigne une solution stationnaire réalisant une condition d'équilibre en détail ne dépendant ni de* x *ni de* t
De plus $\rho^\infty \leq min\{\bar{\rho}, \rho_s\}$

Si en outre $z_s = +\infty$
et si $\sum_{i=1}^{\infty} i^\theta$
alors toute la suite $c_i(t_n + t, x)$ *converge vers* m_i.

4.2 Etude des orbites

Le but de cette partie va être de montrer une propriété de compacité sur la suite c_i^n. A cette fin, nous allons démonter la propriété suivante:

Proposition 7. *A i fixé et pour tout $T > 0$, la suite $(c_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $L^2([0;T]; L^2(\Omega))$.*

L'idée directrice de la preuve est de montrer que la suite $(c_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1([0;T] \times \Omega)$.
Nous allons pour cela obtenir des estimations en norme $L^2([0;T]; L^2(\Omega))$ sur les dérivées de la suite c_i^n. A cette fin, démontrons le lemme suivant:

Lemme 17. *A i fixé et pour tout $T > 0$, la suite $\partial_t c_i^n$ est bornée dans $L^2([0;T]; L^2(\Omega))$.*

Preuve
On considère l'équation numéro i du système (29), on la multiplie par $\partial_t c_i(t, x)$ et on intègre sur Ω.
On obtient alors:

$$\int_\Omega [\partial_t(c_i)]^2(t,x)dx - \int_\Omega \nabla_x(u(t,x)\cdot c_i(t,x))\partial_t c_i(t,x)dx - \int_\Omega \partial_t(c_i)(t,x)\Delta(c_i)(t,x)dx \quad (80)$$
$$= \int_\Omega Q(c)_i(t,x)\partial_t c_i(t,x)dx$$

Considérons le terme:

$$\int_\Omega \partial_t(c_i)(t,x)\Delta(c_i)(t,x)dx = \sum_{j=1}^{D}\int_\Omega \partial_t c_i^n(t,x)\partial_{x_j}^2 c_i^n(t,x)dx$$

D'après la formule de Green, on a:

$$\int_\Omega \partial_t c_i(t,x)\partial_{x_j}^2 c_i(t,x) = \int_\Gamma [\partial_\eta c_i(t,\sigma)\partial_\eta\partial_t c_i(t,\sigma)]d\sigma - \int_\Omega \partial_t\partial_{x_j}c_i(t,x)\partial_{x_j}c_i(t,x)dx$$

Or, comme la solution de l'équation (29) vérifie une condition de Neuman, alors

$$\int_\Gamma [\partial_\eta c_i(t,\sigma)\partial_\eta\partial_t c_i(t,\sigma)]d\sigma = 0$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c_i(t,x)|^2 dx = \int_\Omega \partial_t\partial_{x_j}c_i^n(t,x)\partial_{x_j}c_i^n(t,x)dx$$

D'où,

$$\int_\Omega \partial_t(c_i^n)(t,x)\Delta(c)(t,x)dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c_i(t,x)|^2 dx$$

D'autre part comme en utilisant la borne L^∞ de u, on obtient:

$$\textstyle\int_\Omega \nabla_x(u_j(t,x))\partial_{x_j}\partial_t c_i(t,x)dx \leq \|u_j\|_\infty |\int_\Omega \partial_t c_i(t,x)\partial_{x_j}c_i(t,x)dx|$$

Soit $\varepsilon > 0$. En applicant, l'inégalité d'Young avec ε ainsi choisi, on obtient:

$$|\int_\Omega \partial_t c_i(t,x)\partial_{x_j}c_i(t,x)dx| \leq [\varepsilon\int_\Omega |\partial_t c_i^n(t,x)|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |\partial_{x_j}c_i(t,x)|^2 dx]$$

D'où,

$$|\sum_{j=1}^{D}\int_\Omega u_j(t,x)\partial_t c_i(t,x)\partial_{x_j}c_i(t,x)dx| \leq C_D\varepsilon\int_\Omega |\partial_t c_i(t,x)|^2 dx + \frac{C_D}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{D}\int_\Omega |\partial_{x_j}c_i|^2 dx$$

où $C_d = \sum_{j=1}^{D}\frac{\|u_j\|_\infty}{2}$ Donc en revenant à la formule(80), on obtient:

$$\begin{aligned}\int_\Omega [\partial_t(c_i)]^2(t,x)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c_i^n(t,x)|^2 dx \leq\ & \textstyle\int_\Omega Q(c)_i(t,x)\partial_t c_i^n(t,x)dx \\ & \textstyle + C_D\varepsilon\int_\Omega |\partial_t c_i(t,x)|^2 dx \\ & + \tfrac{C_D}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{D}\int_\Omega |\partial_{x_j}c_i|^2 dx\end{aligned}$$

Or, $Q(c)_i(t,x)$ étant bornée il existe une constante M_i indépendante de t et x vérifiant: $Q(c)_i(t,x) \leq M_i$.
L'inégalité précédente devient donc,

$$\begin{aligned}\int_\Omega [\partial_t(c_i)]^2(t,x)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c_i^n(t,x)|^2 dx &\leq \int_\Omega M_i \partial_t c_i(t,x)dx \\ &+ C_D\varepsilon \int_\Omega |\partial_t c_i(t,x)|^2 dx \\ &+ \frac{C_D}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{D}\int_\Omega |\partial_{x_j} c_i|^2 dx\end{aligned}$$

On intègre alors l'inégalité précédente par rapport au temps sur $[t; T+t]$ et on obtient:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_\Omega [\partial_t(c_i)]^2(t,x)dxdt + \int_t^{t+T}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c_i(t,x)|^2 dxdt &\leq \int_t^{t+T}\int_\Omega M_i\partial_t c_i^n(t,x)dx \quad (81)\\ &+ C_D\varepsilon\int_t^{t+T}\|\partial_t c_i(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)}dt \quad (82)\\ &+ \frac{C_D}{\varepsilon}\int_t^{t+T}\|\nabla_x c_i\|^2_{L^2(\Omega)}dt \quad (83)\end{aligned}$$

En applicant l'inégalité d'Young à: $\int_t^{t+T}\int_\Omega M_i\partial_t c_i(t,x)dx$, l'inégalité précédente devient:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_\Omega [\partial_t(c_i)(t,x)]^2 dx + \int_t^{t+T}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c_i(t,x)|^2 dxdt &\leq M_i(T) + \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (\partial_t c_i(t,x))^2 dxd\\ &+ C_D\varepsilon\int_t^{t+T}\|\partial_t c_i(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\ &+ \frac{C_D}{\varepsilon}\int_t^{t+T}\|\nabla_x c_i\|^2_{L^2(\Omega)}dt\end{aligned}$$

où $M_i(T)$ est une constante ne dépendant que de i et T.
Soit, en intégrant $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c_i(t,x)|^2 dx$ entre t et $T+t$, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_\Omega [\partial_t(c_i)^2(t,x)]dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla c_i(t+T,x)|^2 dx \leq\ & M_i(T) + (\tfrac{1}{2} + C_D\varepsilon)\int_0^T\int_\Omega (\partial_t c_i^n(t,x))^2 dx\\ & +\tfrac{C_D}{\varepsilon}\int_t^{t+T}\|\nabla c_i(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\ & \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla c_i(t,x)|^2 dx\end{aligned}$$

Soit,

$$(\frac{1}{2}-C_D\varepsilon)\int_0^T\int_\Omega \partial_t(c_i)]^2(t,x)dx \leq M_i(T)+\frac{1}{2}\|\nabla_x c_i(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{C_D}{\varepsilon}\int_t^{t+T}\|\nabla c_i(t,x)^2|_{L^2(\Omega)}dt$$

On choisit alors ε de telle sorte que $\frac{1}{2}-C_D\varepsilon>0$. On obtient donc:

$$(\frac{1}{2}-C_D\varepsilon)\int_t^{t+T}\int_\Omega(\partial_t c_i^n(t,x))^2dxdt \leq M_i(T)+\frac{C_D}{\varepsilon}\int_0^T\|\nabla c_i(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\frac{1}{2}\|\nabla c_i\|^2_{L^2(\Omega)}(t)$$

Or, c_i étant bornée dans $L^2([0;T];H^1(\Omega))$, on obtient:

$$(\frac{1}{2}-C_D\varepsilon)\int_0^T\int_\Omega \partial_t(c_i^n)]^2(t,x)dx \leq M_i(T)+\frac{1}{2}\|\nabla c_i\|_{L^2(\Omega)}(t)$$

On intègre alors sur $[t_0;t_0+T]$. Ainsi:

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_t^{t+T}\|\partial_t(c_i)(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)}dx \leq \tilde{M}_i(T)+\int_{t_0}^{t_0+T}\|\nabla c_i\|_{L^2(\Omega)}dt$$

où $\tilde{M}_i(T)$ est une constante ne dépendant que de i et de T.
Or, c_i est bornée dans $L^2([0;T]\times H^1(\Omega))$. Par conséquent:

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_t^{t+T}\|\partial_t(c_i^n)](t,x)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau \leq \tilde{M}_i'(T)$$

Posons, $y(\tau)=\int_\Omega|\partial_t c_i(\tau;x)|^2d\tau$ Donc:

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_t^{t+T}y(\tau)d\tau dt \leq \tilde{M}_i'(T)$$

Or par application du théorème de Fubini à y on obtient:

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_t^{t+T}y(\tau)d\tau dt=\int_{t_0}^{t_0+2T}\int_{\tau-T}^{\tau}y(\tau)d\tau dt$$

Soit,

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_t^{t+T}y(\tau)d\tau dt=T\int_{t_0}^{t_0+2T}y(\tau)d\tau$$

Donc, y étant positive,

$$\int_{t_0+1}^{t_0+2T-1} y(\tau)d\tau \leq \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\int_{t}^{t+T} y(\tau)d\tau dt$$

Finalement, il existe une constante $\tilde{M}_i''(T)$ ne dépendant que de i et de T telle que:

$$\int_{t_0+1}^{t_0+2T-1}\int_{\Omega} |\partial_t c_i(\tau;x)|^2 d\tau \leq \tilde{M}_i''(T)$$

On pose alors $t_0 = t_n - 1$ et $T' = 2(T-1)$.
D'où,

$$\int_{t_n}^{t_n+T'}\int_{\Omega} |\partial_t c_i(\tau;x)|^2 d\tau \leq \tilde{M}_i''(T)$$

Par conséquent, $\partial_t c_i^n$ est bornée dans $L^2([0;T'];L^2(\Omega))$.
Ce qui démontre le lemme.
$\square$.

Preuve de la proposition

Or, comme ∇c_i^n est bornée dans $L^2([0;T'];L^2(\Omega))$ et que $\partial_t c_i^n$ est bornée alors c_i^n est bornée dans $H^1([0;T]\times\Omega)$.
Or, comme $H^1([0;T]\times\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2([0;T];L^2(\Omega))$.
Donc, la suite c_i^n est compacte dans $L^2([0;T];L^2(\Omega))$.
Ce qui achève la preuve de la proposition.
$\square$.

On peut donc extraire de c_i^n une sous suite notée $c_i^{\varphi_i(n)}$ qui converge vers c_i^∞ dans L^2
En utilisant encore une fois un procédé diagonal sur la variable de taille on reextrait à nouveau. On se ramène alors à une sous suite dont l'extraction est indépendante de i encore notée c_i^n telle que
$(\forall i \in \mathbb{N}) c_i^n \to c_i^\infty$ dans L^2.
Il va alors s'agir de montrer dans la section suivante que $(c_i^\infty)_{i\in\mathbb{N}}$ réalise une condition d'équilibre en détail.

4.3 Production d'entropie

Dans cette section, nous allons considérer la quantité suivante:

$$V^N(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega c_i^N(t,x)[ln(\frac{c_i^N(t,x)}{m_i}) - 1]dx \tag{84}$$

Elle correspond à la production d'entropie dans l'équation (31) avec pour conditions initiales $c_{i,0} + \frac{m_i}{N}$
Il s'agit d'une quantité qui devra décroitre au cours du temps le long des trajectoires et que l'on va chercher à minimiser.
En fait, physiquement cette quantité correspond à l'énergie libre de la réaction modélisée par l'équation (31). Le minimum de cette fonctionnelle correspond alors à un état d'équilibre qui sera atteint dans notre cas pour les temps infinis.

Nous utiliserons également la quantité suivante:

$$D^M(u) = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{M-k} m_{i+k} b_{i,k} [ln\frac{u_i u_k}{m_i m_k} - ln\frac{u_{i+k}}{m_{i+k}}][\frac{u_i u_k}{m_i m_k} - \frac{u_{i+k}}{m_{i+k}}] \tag{85}$$

où $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite positive.
Par application du théorème des accroissements finis, on a que les termes définissant D^M sont tous positifs.
Nous utiliserons également les deux lemmes suivants dont la preuve figure dans [CP1].

Lemme 18. *Doit u et m deux suites vérifiant $m_i > 0$ et $u_i \geq 0$. Alors pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a:*
$$\sum_{i}^{M} u_i ln(\frac{u_i}{m_i}) \geq \sum_{i}^{M} u_i |ln(\frac{u_i}{m_i})| - 2\sum_{i}^{M}(iu_i + 2m_i e^{\frac{-i}{2}})$$

Lemme 19. *Pour toutes suites (ϕ_i) et (c_i), nous avons*
$$\sum_{i=1}^{N}[G_i^N(c) - P_i^N(c)](\phi_i) = \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-k}(a_{k,i}c_k c_i - b_{k,i}c_{i+k})((\phi_{i+k})_{i+k} - (\phi_i)_i - (\phi_k))$$

Démontrons maintenant le lemme suivant:

Lemme 20. *La quantité V^N définie en (84) vérifie:*
$(\forall t > 0), \dfrac{dV^N}{dt} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{|\nabla c_i^N(t,x)|^2}{c_i^N(t,x)} dx + \int_\Omega D^N(c^N)(t,x)dx = 0$
De plus, il existe une constante K indépendante de N telle que $V^N(0) \leq K$.

Preuve du lemme

Première partie

On considère l'équation définissant le problème tronqué (31). L'idée est alors de multiplier l'équation numéro i par $ln\frac{c_i^N(t,x)}{m_i}$, de l'intègrer sur Ω et de sommer sur i de 1 à N.
Par dérivation sous l'intégrale,

$$\frac{dV^N}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (\partial_t c_i^N(t,x)[ln\frac{c_i^N(t,x)}{m_i} - 1] + \partial_t c_i^N(t,x))dx$$

Soit,

$$\frac{dV^N}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \partial_t c_i^N(t,x) ln(\frac{c_i^N}{m_i})(t,x)dx$$

Par ailleurs,

$$\int_\Omega \Delta c_i^N(t,x)[ln(\frac{c_i(t,x)}{m_i}) - 1]dx = \sum_{j=1}^{D} \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}[ln(\frac{c_i(t,x)}{m_i}) - 1]dx$$

Donc, d'après la formule de Green,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta c_i^N(t,x)[ln(\frac{c_i(t,x)}{m_i}) - 1]dx &= \sum_{j=1}^{D} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \eta}(c_i^N)(t,\sigma)[ln(\frac{c_i(t,\sigma)}{m_i}) - 1]d\sigma \\ &- \sum_{j=1}^{D} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} c_i^N \partial_{x_j}[ln(\frac{c_i(t,x)}{m_i}) - 1]dx \end{aligned}$$

Or,

$$\partial_{x_j}[ln(\frac{c_i(t,x)}{m_i}) - 1] = \frac{\frac{\partial x_j c_i^N}{m_i}}{\frac{c_i^N(t,x)}{m_i}} = \frac{\partial x_j c_i^N}{c_i^N}(t,x)$$

Or, comme $(\forall \sigma \in \Gamma)$, $\frac{\partial}{\partial \eta}(c_i^N)(t,\sigma) = 0$, on obtient finalement

$$\int_\Omega \Delta c_i^N(t,x)[ln(\frac{c_i(t,x)}{m_i}) - 1]dx = -\int_\Omega \frac{|\nabla c_i^N(t,x)|^2}{c_i^N(t,x)}dx$$

D'autre part,

$$\int_\Omega u(t,x)\cdot\nabla(c_i^N)(t,x)ln(\frac{c_i^N(t,x)}{m_i})dx = \sum_{j=1^D}\int_\Omega u_j(t,x)\partial_{x_j}c_i^N(t,x)ln(\frac{c_i^N(t,x)}{m_i})dx$$

Or en considérant F une primitive de $ln(\frac{c_i^N(t,x)}{m_i})$, on obtient par la formule de Green,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_j(t,x)\cdot\partial_{x_j}(c_i^N)(t,x)ln(\frac{c_i^N(t,x)}{m_i})dx &= \int_\Gamma u_j(t,\sigma)F(c_i(t,\sigma))d\sigma \\ &- \int_\Omega \partial_{x_j}u_j(t,x)F(\frac{(c_i^N}{m_i})(t,x)dx\end{aligned}$$

Or, comme $u \in H_0^1(\Omega))$, alors $\int_\Gamma u_j(t,\sigma)F(c_i(t,\sigma))d\sigma = 0$. Par conséquent,

$$\int_\Omega u(t,x)\cdot\nabla(c_i^N)(t,x)ln(\frac{c_i^N(t,x)}{m_i})dx = -\int_\Omega div(u_j)(t,x)F(\frac{c_i^N}{m_i})(t,x)dx$$

Or, comme div(u)=0, on obtient:

$$\int_\Omega u_j(t,x)\cdot\partial_{x_j}(c_i^N)(t,x)ln(\frac{c_i^N(t,x)}{m_i})dx = 0$$

Pour le second membre, nous allons utiliser le lemme (16) avec $(\phi)_i = ln(\frac{c_i}{m_i})$. Ce qui nous donne

$$\sum_{i=1}^N[G_i^N(c) - P_i^N(c)]ln(\frac{c_i}{m_i}) = \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-k}(a_{k,i}c_kc_i - b_{k,i}c_{i+k})((ln(\frac{c_{i+k}}{m_{i+k}}) - ln(\frac{c_i}{m_i}) - ln(\frac{c_k}{m_k}))$$

Ainsi en intégrant sur Ω l'égalité précédente, on obtient en considérant la quantité D^M définie en (85):

$$(\forall t > 0), \frac{dV^N}{dt} + \sum_{i=1}^N\int_\Omega \frac{|\nabla c_i^N(t,x)|^2}{c_i^N(t,x)}dx + \int_\Omega D^N(c^N)(t,x)dx = 0$$

Seconde partie

D'après la formule (84), on a:

$$V^N(0) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (\frac{c_i^0}{m_i} + \frac{1}{N})[ln(\frac{c_i^0}{m_i} + \frac{1}{N}) - 1]dx$$

Donc, d'après l'inégalité de convexité appliquée à la fonction $x \to x(ln(x) - 1)$ à savoir,

$$(\forall a, b > 0)(a + b)(ln(a + b) - 1) \leq a(ln(2a) - 1) + b(ln(2b) - 1)$$

on obtient que:

$$V^N(0) \leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega [\frac{m_i}{N}(ln(\frac{2}{N}) - 1) + c_i^0(ln(\frac{2c_i^0(x)}{m_i}) - 1)]dx$$

Soit,

$$V^N(0) \leq \int_\Omega [\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m_i}{N}|(ln(\frac{2}{N}) - 1)| + c_i^0(x)(|ln(\frac{c_i^0}{m_i})(x) + 1)|]dx$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V^N(0) \leq \quad & \tfrac{1}{N}|(ln(\tfrac{2}{N}) + 1)| \textstyle\int_\Omega [\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} m_i]dx \\ & + \textstyle\int_\Omega [\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} + c_i^0(x)(|ln(\frac{c_i^0}{m_i})(x) + 1)|]dx \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} m_i = \rho^\infty$ et que $\frac{1}{N}|(ln(\frac{2}{N}) + 1)$ est bornée, alors il existe $K > 0$ indépendante de N telle que:

$$V^N(0) \leq K \int_\Omega [1 + \sum_{i=1}^{+\infty} + c_i^0(x)(|ln(\frac{c_i^0}{m_i})(x) + 1)|)]dx$$

Or, comme par hypothèse, $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} c_i^0(x)(|ln(\frac{c_i^0}{m_i})(x) + 1)|)dx \in L^1(\Omega)$, alors

$$V^N(0) \leq \tilde{K}$$

où $\tilde{K}$ esr une constante positive indépendante de N.

Ce achève de prouver le lemme 17 .

$\square$

Nous allons alors être en mesure de démontrer le théorème 4.

preuve du théorème 4

Première partie

Démontrons alors que pour tout $M \in \mathbb{N}$, $D^M(c^\infty) = 0$.
A $N \in \mathbb{N}$ fixé nous avons d'après le lemme précédent:

$$V^N(T) - V^N(0) + \int_0^T \int_\Omega D^N(c^N)(t,x)dxdt \leq 0 \tag{86}$$

D'autre part, $V^N(T) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega [ln(\frac{c_i^N}{m_i})(T,x) - 1]dx$
Alors, en applicant le lemme (15), on obtient:

$$V^N(T) \geq \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} c_i(T,x)|ln(\frac{c_i^N}{m_i})(T,x)|dx - \sum_{i=1}^{N}(2i+1)\int_\Omega c_i(T,x) + 2\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} m_i e^{\frac{-i}{2}}dx$$

Soit,

$$V^N(T) \geq \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} c_i(T,x)|ln(\frac{c_i^N}{m_i})(T,x)|dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}(2i+1)\int_\Omega c_i(T,x)$$

Par conséquent, il existe une constante K' indépendante de N vérifiant:

$$V^N(T) \geq \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} c_i(T,x)|ln(\frac{c_i^N}{m_i})(T,x)|dx + K' \tag{87}$$

D'où, en combinant l'inégalité précédente avec l'inégalité (86), ci-dessus, on obtient:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} c_i(T,x)|ln(\frac{c_i^N}{m_i})(T,x)|dx + \int_0^T \int_\Omega D^N(c^N)(t,x)dxdt \leq \tilde{K}$$

où $\tilde{K}$ est une constante positive indépendante de N.
Par conséquent, on obtient:

$$\int_0^T \int_\Omega D^N(c^N)(t,x)dxdt \leq \tilde{K}$$

Donc, les termes de D^M étant tous positifs,on obtient:

$$(\forall M \leq N), \int_0^T \int_\Omega D^M(c^N)(t,x)dxdt \leq \int_0^T \int_\Omega D^N(c^N)(t,x)dxdt \leq \tilde{K}$$

Or, d'après la proposition de la section précédente, c_i^N est compacte dans $L^2([0;T]\times\Omega)$.
Par conséquent, il existe une sous suite de c_i^N qui converge pour tout i vers c.
D'où, $D^M(c^N)$ converge vers $D^M(c)$ pp sur $[0;T]\times\Omega$.
Or, $c_i^N(t,x) \leq \|\rho_0\|_\infty$.
De plus,

$$c_i^N(t,x) \leq \sum_{i=1}^N c_i^0 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N m_i$$

Donc,

$$c_i^N(t,x) \leq \|\rho_0\|_\infty + \rho^\infty$$

Par conséquent, en revenant à la définition de $D^M(c)$, on obtient que cette quantité est bornée indépendemment de N. D'où, $[0;T]\times\Omega$ étant de mesure finie, on obtient par convergence dominée:

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\Omega \int_0^T D^M(c^N)(t,x)dtdx = \int_\Omega \int_0^T D^M(c)(t,x)dtdx$$

Ainsi,

$$\int_\Omega \int_0^T D^M(c)(t,x)dtdx \leq \tilde{K}$$

Soit, en faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient:

$$\int_\Omega \int_0^{+\infty} D^M(c)(t,x)dtdx \leq \tilde{K}$$

Or, D^M étant à termes positifs D^M est strictement croissante. Donc, d'après le théorème de Beppo-Levy, on a en faisant tendre M vers $+\infty$:

$$\int_\Omega \int_0^{+\infty} D(c)(t,x)dtdx \leq \tilde{K}$$

Revenons maintenant à la suite $c_i^n(t,x) = c_i(t+t_n,x)$.
Par changement de variable, on a:

$$\int_{t_n}^{+\infty} \int_\Omega D(c(t,x)))dxdt = \int_0^{+\infty} \int_\Omega D(c_n(t,x)))dxdx$$

Or,

$$\int_{t_n}^{+\infty} \int_\Omega D(c(t,x)))dxdt = \int_0^{+\infty} \int_\Omega \chi_{[t_n;+\infty[)} D(c(t,x))dxdt$$

De plus,

$$\chi_{[t_n;+\infty[} D(c(t,x)) \leq D(c(t,x))$$

avec $D(c(t,x))$ intégrable sur $[0;+\infty[\times\Omega$.
Ainsi par convergence dominée,

$$D(c_n) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^1([0;+\infty[\times\Omega).$$

Donc, comme $D^M(c^n) \leq D(c^n)$, alors,

$$(\forall M \in \mathbb{N}) D^M(c^n) \to 0 \text{dans} L^1([0;+\infty[\times\Omega)$$

.
Or, comme à une sous suit près,

$$(\forall M \in \mathbb{N}) D^M(c^n) \to D^M(c^\infty) \text{ pp sur}([0;+\infty[\times\Omega$$

alors par unicité de la limite

$$(\forall M \in \mathbb{N}), D^M(c^\infty) = 0$$

Cela signifie donc, que à x et t fixés $(c^\infty)_{i\in\mathbb{N}}$ réalise une condition d'équilibre en détail.

Seconde partie

Le but de cette section est de montrer que c^∞ ne dépend ni de x ni de t. Pour avoir une borne L^∞ sur la suite c_i^N on va uliliser la masse totale des particules qui réagissent.
Or, d'après le lemme 11, on a la majoration: $(\forall i \leq N), c_i^N \leq \|\rho_0\|_\infty$.
L'inégalité du lemme devient alors:

$$\frac{1}{\|\rho_0\|_\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \int_\Omega i|\nabla c_i^N|^2 dt dx \leq V^N(0) - V^N(T)$$

Or, d'après linégalité (87), $V^N(T)$ est minoré par une constante indépendante de N.
On obtient alors,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^T \int_\Omega i|\nabla c_i^N|^2 dt dx \leq L$$

$$\sum_{i=1}^{M} \int_0^T \int_\Omega i|\nabla c_i^N|^2 dt dx \leq L$$

Or comme $c_i^N \to c_i$ dans L^2 fort, $\nabla c_i^N \to \nabla c_i$ au sens des distributions. Donc, en faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\sum_{i=1}^{M} \int_0^T \int_\Omega i|\nabla c_i|^2 dt dx \leq L$$

Ainsi, en faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^T \int_\Omega i|\nabla c_i|^2 dt dx \leq L$$

Ainsi, en revenant à la suite c_i^n, on obtient:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^T \int_\Omega i|\nabla c_i^n|^2 dt dx \leq L$$

Soit, par convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^T \int_\Omega i|\nabla c_i^n|^2 dt dx = 0$$

Ce qui implique que c_i^∞ est indépendante de x.
Par ailleurs, en revenant à l'équation (29), on a:

$$\partial_t c_i^n(t,x) - \Delta(c_i^n)(t,x) - u\cdot\nabla(c_i^n)(t,x) = G_i(c^n)(t,x) - P_i(c^n)(t,x)$$

Or en raisonant comme dans la preuve du théorème (3) on obtient que

$$G_i(c^n) - P_i(c^n) \to G_i(c^\infty) - P_i(c^\infty) \quad \text{dans} \quad L^2([0;T]\times\Omega)$$

. Or, $c^\infty(t,x)$ réalisant une condition d'équilibre, alors,

$$G_i(c^\infty)(t,x) - P_i(c^\infty) = 0$$

De plus,

$$\Delta(c_i^n)(t,x) - u(t,x)\cdot\nabla(c_i^n)(t,x) \to 0 \text{au sens des distributions.}$$

Par conséquent, $\partial_t c_i^\infty(t,x) = 0$.
Donc, c_i^∞ ne dépend pas non plus de t.

Troisième partie

- Montrons dans un premier temps que $\rho^\infty \leq \rho_s$

Par hypothèse, on a: $\rho^\infty = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} iQ_i(m_1)^i$.
Or, comme cette dernière quantité est finie et qu'elle définit une série numérique à termes positifs, alors z_s étant le rayon de convergence de la série entière de coefficients iQ_i, $m_1 \leq z_s$.
Par conséquent, $\rho^\infty \leq \rho_s$.
- Montrons dans un second temps que: $\rho^\infty \leq \bar{\rho}$.

On considère f la solution de :

$$\partial_t(f) - \Delta(f)(t,x) - u\cdot\nabla(f)(t,x) = 0 \tag{88}$$
$$f(0;x) = \rho_0(x) \tag{89}$$
$$\partial_\eta f(t;\sigma) = 0$$

On considère les quantités suivantes:

$$\rho_M^n(t,x) = \sum_{i=1}^{M} ic_i^n(t,x) \qquad \rho^n(t,x) = \sum_{i=1}^{+\infty} ic_i^n(t,x)$$
$$\rho(t,x) = \sum_{i=1}^{+\infty} ic_i \qquad \rho_M^\infty(t,x) = \sum_{i=1}^{M} ic_i^\infty$$

Lemme 21. *ρ est alors majorée par f.*

Preuve

En effet, si $f = \limsup_{N\to+\infty} \rho^N(t,x)$, alors f est bien solution de (89). Or,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{M} ic_i^N(t,x) = \sum_{i=1}^{M} ic_i(t,x)$$

Soit, comme

$$\sum_{i=1}^{M} ic_i^N(t,x) \leq \rho^N(t,x)$$

Soit, par passage à la limite,

$$\sum_{i=1}^{M} ic_i(t,x) \leq f(t,x)$$

On fait maintenant tendre M vers $+\infty$ et on obtient:

$$\rho(t,x) \leq f(t,x)$$

Ce qui termine la preuve du lemme.
□

Lemme 22. *Soit f^n la suite définie par $f^n(t,x) = f(t+t_n,x)$.*
On considère $f^\infty = \limsup_{n\to+\infty} f^n$.
Alors, f^∞ est indépendante de t et de x.

Preuve On multiplie l'ëquation 89 et on intègre sur Ω. On obtient alors:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(t,x)dx + \int_\Omega |\nabla f(t,x)|^2 dx = 0$$

On intègre alors sur, $[0;T]$ la dernière égalité et on obtient:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega f^2(T,x)dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla f(t,x)|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho_0(x))^2 dx$$

Alors,
$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla f(t,x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega (\rho_0(x))^2 dx$$
Donc,
$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla f(t,x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} mes(\Omega) \|\rho\|_\infty dx$$
Ainsi en faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient:
$$\int_0^{+\infty} \int_\Omega |\nabla f(t,x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} mes(\Omega) \|\rho\|_\infty dx$$
Alors, $|\nabla f(t,x)|^2 \in L^1(mathbbR_+ \times \Omega)$. De plus, par changement de variable, on obtient:
$$\int_0^{+\infty} \int_\Omega |\nabla f^n(t,x)|^2 dxdt = \int_{t_n}^{+\infty} \int_\Omega |\nabla f(t,x)|^2 dxdt$$
De plus, on a
$$\chi_{[t_n;+\infty[} |\nabla f(t,x)|^2 \leq |\nabla f(t,x)|^2$$
Donc, par convergence dominée,
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \int_\Omega |\nabla f^n(t,x)|^2 dxdt = 0$$
Donc, à une sous suite près,
$$|\nabla f^n(t,x)|^2 \to 0 \quad pp$$
Donc, par unicité de la limite,
$$|\nabla f(t,x)|^2 = 0$$
Alors, f ne dépend pas de x. En revenant à léquation (89),
$$\partial_t f^n(t,x) - \Delta(f^n)(t,x) + \nabla f^n(t,x) = 0$$
On passe alors à la limite au sens des distributions et on obtient:
$$\partial_t f^\infty(t,x) = 0$$
Donc, f^∞ ne dépend ni de x ni de t.
Ce dui achève la preuve du lemme.
□

Lemme 23. *Avec f^∞ définie dans le lemme précédent, on a $(f^\infty)(t,x)dx = \bar{\rho}$*

Preuve En intégrant par rapport à la variable d'espace, et en applicant la formule de Green, on a:

$$\int_\Omega \partial_t(f^n)(t,x)dx = 0$$

Soit, en intégrant par rapport au temps,

$$\int_\Omega (f^n)(t,x)dx = \int_\Omega (\rho^0)(x)dx$$

Or, par convergence dominée, $\limsup \int_\Omega (f^n)(t,x)dx = \int_\Omega (f^\infty)(t,x)dx$. Soit f^∞ étant indépendante de t et de x on obtient:

$$\limsup (f^n)(t,x)dx = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega (\rho^0)(x)dx = \bar{\rho}$$

Ce qui termine la preuve du lemme

□

De même,

$$\limsup (\rho_M^n)(t,x)dx = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega (\rho_M^0)(x)dx$$

Or, comme $\rho_M^n \leq \bar{\rho}$, par passage à la limite sur n, $\rho_M^\infty \leq \bar{\rho}$

Soit, $\sum_{i=1}^{M} ic_i^\infty \leq \bar{\rho}$.

On a donc une série numérique à termes positifs dont la suite des sommes partielles est bornée uniformément en M. Elle converge donc.
En faisant tendre M vers $+\infty$ on obtient donc, $\rho^\infty \leq \bar{\rho}$.
Ainsi la première partie du théorème est démontrée

• On suppose maintenant que $z_s = +\infty$.
Montrons alors que $\rho^\infty = \bar{\rho}$.
Posons maintenant,

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{+\infty} c_i^n(t,x)|ln(\frac{c_i^n(t,x)}{c_i^\infty})|dx$$

Fixons $r > 1$.
La série entière dont les coefficients sont: c_i^∞ a pour rayon de convergence

$+\infty$.
Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{\infty} ic_i^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(rc_1^{\infty})^i < \infty$$

On définit maintenant pour $t > 0$ et $x \in \Omega, I_r^n(t,x) = \{i; c_i^n(t,x) > r^i c_i^{\infty}\}$.
Nous avons alors les inégalités suivantes pour $i \geq M$.

$$\sum_{i \ \in I_r^N(t,x)} c_i^n(t,x)|ln(\frac{c_i^n(t,x)}{c_i^{\infty}})| \geq \sum_{i \ inI_r^N(t,x)} ln(r)ic_i^n(t,x)$$

$$\sum_{i \notin I_r^N(t,x)} c_i^n(t,x)|ln(\frac{c_i^n(t,x)}{c_i^{\infty}})| \leq \sum_{i \notin I_r^N(t,x)} ir^i c_i^{\infty}$$

Soit, en réunissant les deux dernières inégalités, on obtient:

$$\sum_{i \geq M} ic_i^n(t,x) \leq \frac{1}{ln(r)} \sum_{i \ \in I_r^N(t,x)} c_i^n(t,x)|ln(\frac{c_i^n(t,x)}{c_i^{\infty}})| + \sum_{i \notin I_r^N(t,x)} ir^i c_i^{\infty}$$

En intégrant sur Ω, on obtient alors:

$$\int_{\Omega} \sum_{i \geq M} ic_i^n(t,x) \leq \frac{1}{ln(r)} W^n(t) + \sum_{i \geq M} ir^i c_i^{\infty}$$

Par ailleurs, comme $W^n(t) \leq K$, on obtient:

$$\int_{\Omega} \sum_{i \geq M} ic_i^n(t,x) \leq \frac{1}{ln(r)} K + R_M$$

où R_M désigne le reste d'ordre M de la série de terme général $ir^i c_i^{\infty}$
Donc, par convergence de la série, on a:

$$\lim_{M \to +\infty} R_M = 0$$

Par inégalité triangulaire,

$$mes(\Omega)|\bar{\rho} - \rho^{\infty}| \leq \int_{\Omega} [|\bar{\rho} - \rho^n| + |\rho_M^n - \rho^n| + |\rho_M^{\infty} - \rho_M^n| + |\rho_M^{\infty} - \rho^{\infty}|]dx$$

$$mes(\Omega)|\bar{\rho} - \rho^{\infty}| \leq \int_{\Omega} [|\bar{\rho} - \rho^n| + |\rho_M^n - \rho^n| + |\rho_M^{\infty} - \rho_M^n| + \frac{1}{ln(r)} K + R_M] dx$$

On considère alors la limite supérieure de chaque membre de l'inégalité précédente lorsque n tend vers $+\infty$.
On obtient alors:

$$mes(\Omega)|\bar{\rho} - \rho^{\infty}| \leq \int_{\Omega} |\rho_M^{\infty} - \rho_M^n| dx + \frac{1}{ln(r)} K + R_M$$

Ainsi en faisant tendre succcessivement M puis R vers $+\infty$ on obtient que $\bar{\rho} = \rho^{\infty}$.
Or, la fonction $x \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty}$ est bijective sur $mathbbR_+$.
Donc, c_1^{∞} est déterminée de manière unique à partir de $\bar{\rho}$. La suite c_1^n possède donc une seule valeur d'adhérence. Donc, toute la suite converge vers c_1^{∞}.
Donc, chaque suite c_i^n converge alors vers c_i^{∞}.
Ce qui achève la preuve du théorème 4.

References

[E-Gu] E-Guyon
hydrodynamique physique CNRS

[B] H-Brézis
Analyse fonctionelle: théorie et applications
Masson, 1988.

[CP1] JF-Collet et F-Poupaud
Asymptotic behaviour of solutions to the diffusive fragmentation-coagulation system
1996

[CP2] JF-Collet et F-Poupaud
Existence of solutions to coagulation-fragmentation systems with diffusion
1996

[BCP] JM-Ball, J-Carr et O-Penrose
The Becker-Doring Cluster Equations: Basic Properties and asymptotic Behaviour of Solutions

[D] PB-Dubovskii
Existence theorem for space inhomogeneous coagulation equation

[LM1] P-Laurencot et S-Mischler
Global existence for the discrete diffusive coagulation-fragmentation equations in L^1
2001

[LM2] P-Laurencot et S-Mischler
The continous coagulation-fragmentation equations with diffusion
2001

[LM3] P-Laurencot et S-Mischler
From the discrete to the continous coagulation-fragmentation equations
2001

[Bou] F-Bouchut
Introduction à la théorie mathématique des équations cinétiques

Session L'Etat de la recherche de la SMF. Equations cinétiques.
Orléan, 4-6 juin 1998

[Bur] AV-Burobin
Existence and iniqueness of a solution of a Cauchy Problem for inhomogeneous three-dimentional coagulation

[CD] D-Chae et P-Dubovskii
Existence and uniqueness for spacially inhomogeneous coagulation-condensation equation with unbounded kernels
1997

[DPL] R.J-DiPerna P.L-Lions *Ordinary differential equation, transport theory and Sobolev Spaces*
1989